نصابِ ذیلی ریاضی

حصہ اول

Cut by [illegible]

سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعہ عثمانیہ

نصابِ ذیلی ریاضی

حصۂ اوّل

برائے طبیعیات بی۔ایس سی

تالیف

مولوی محمد عبدالرحمن خان صاحب، بی۔ایس سی آنرز (لندن)

اسوسیئیٹ آف دی رائل کالج آف سائنس (لندن) فیلو آف دی رائل اسٹرونامیکل سوسائٹی۔ فیلو آف دی فزیکل سوسائٹی لندن

سابق صدر کلیہ جامعۂ عثمانیہ حیدرآباد دکن

۱۳۵۵ھ م ۱۳۴۵ف م ۱۹۳۶ء

از دار الطبع جامعہ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

دیباچہ

نصاب ذیلی ریاضی برائے طبیعیات بی۔ ایس سی کی تیاری میں زیادہ تر اس امر کی کوشش کی گئی ہے کہ جن طلبہ کا اصل مضمون طبیعیات ہو اور جو اعلیٰ ریاضی پر زیادہ وقت نہ صرف کر سکتے ہوں اُن کے لیے ایک ایسی جامع لیکن مختصر کتاب لکھی جائے جس کے مطالعہ سے اُنہیں ریاضی کے ضروری مضامین اور مفید طریقوں سے کافی واقفیت حاصل ہو سکے اور آگے چل کر شوق پیدا ہو کہ اساتذہٗ فن کی مستند کتابوں کا تفصیلی مطالعہ کیا جائے۔

اس کے لکھنے میں مؤلف کو بڑی احتیاط برتنی پڑی۔ ایک طرف نصاب پورا کرنا تھا تو دوسری طرف کتاب کا حجم بھی گھٹانا تھا۔ مسائل کی تفہیم کے ساتھ چیدہ چیدہ مشقی سوالات کا شامل کرنا بھی ضروری تھا نہ اس قدر زیادہ کہ طالب علم گھبرا جائے اور نہ اتنے کم کہ مشق کافی نہ ہو۔

انگریزی، فرانسیسی اور جرمن زبانوں میں بھی اس طرز کی کتابیں بہت کم ہیں۔ اور جو ہیں اُن پر کسی نہ کسی پہلو سے اعتراض ہوا ہے۔ جیسے جیسے کام کی اہمیت معلوم ہو رہی ہے اعتراض کم ہوتے آ رہے ہیں۔ کسی خاص کتاب کا اگر ترجمہ کیا جاتا تو نہ نصاب ہی پورا ہوتا اور نہ حجم کم رہ سکتا۔

اس لیے مختلف درسی کتابوں سے مدد لینے کی ضرورت محسوس ہوئی حصۂ اول کی تالیف میں جن کتابوں سے خاص طور پر استفادہ کیا گیا اُن کے نام درج ذیل ہیں :—

1. F. G. W. BROWN'S Higher Mathematics.
2. F. S. WOODS AND F. H. BAILEY'S A Course in Mathematics, 2 Volumes.
3. HALL AND KNIGHT'S Higher Algebra.
4. C. SMITH'S Co-ordinate Geometry.
5. W. P. MILNE'S Higher Algebra.
6. D. HUMPHREY'S Advanced Mathematics.
7. LONEY'S Plane Trigonometry Part II.
8. H. S. CARSLAW'S Plane Trigonometry.

محمد عبدالرحمٰن خاں

فہرست مضامین

نصاب ذیلی ریاضی۔ برائے طبیعیات بی۔ ایس سی جامعۂ عثمانیہ

حصۂ اول

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

نصاب ریاضی

برائے

طبیعیات۔ بی۔ اے

پہلا باب

مسئلۂ ثنائی

BINOMIAL THEOREM

۱۔ مسئلۂ ثنائی سے مُراد ایک ضابطہ ہے جس کے ذریعہ کوئی دو رقمی جملہ جو (لا + ا) کی شکل کا ہو کسی بھی قوت تک بلند کیا جا سکتا ہے یعنی (لا + ا)^ن کا پھیلاؤ ہے جس میں ن کوئی ایک قوت نما ہے۔

پہلے ہم فرض کرینگے کہ ن ایک مثبت اور صحیح عدد ہے۔

(لا + ا)^ن واضح ہے کہ ن اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں ہر ایک (لا + ا) کے مساوی ہے اور اس پھیلاؤ میں ہر ایک رقم ن ابعاد کی ہے اس لئے کہ وہ ن حروف کو ن اجزائے ضربی میں سے ایک ایک حرف کو لے کر آپس میں ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے چنانچہ ہر وہ رقم جس میں لا^(ن-ر) ا^ر شریک ہے اس طرح بنتی ہے کہ کسی بھی ر اجزائے ضربی میں سے ا کو لیتے ہیں اور بقیہ ن-ر اجزائے ضربی میں سے لا کو لیتے ہیں اس لئے لا^(ن-ر) ا^ر والی رقموں کی تعداد ن اشیاء میں سے ر اشیاء کے طریقہ

انتخاب کی تعداد کے مساوی ہونی چاہیے۔ یعنی $\text{لا}^{\text{ن-ر}} \times \text{ا}^{\text{ر}}$ کا سر ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ ہے۔ پس ر کو علی الترتیب ۰، ۱، ۲، ۳ ..... ن قیمتیں دینے سے جملہ کی تمام رقموں کے سر حاصل ہو جاتے ہیں۔ لہٰذا

$$(\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{1}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}\,\text{ا} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{2}\,\text{لا}^{\text{ن}-2}\,\text{ا}^{2} + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ن-ر}}\,\text{ا}^{\text{ر}} + \cdots + \text{ا}^{\text{ن}}$$

کیونکہ ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{0}$ اور ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}$ دونوں کی قیمت ۱ کے مساوی ہے۔

۲۔ مسئلہ ثنائی کی سادہ ترین شکل $(1+\text{لا})^{\text{ن}}$ کا پھیلاؤ ہے۔ یہ شکل پہلی فصل کے عام ضابطہ میں لا کے بجائے ۱ اور ا کے بجائے لا لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ لہٰذا

$$(1+\text{لا})^{\text{ن}} = 1 + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{1}\,\text{لا} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{2}\,\text{لا}^{2} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{3}\,\text{لا}^{3} + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}} \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$$

$$= 1 + \text{ن}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor\underline{2}} + \cdots + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots(\text{ن-ر}+1)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}} + \cdots + \text{لا}^{\text{ن}}$$

ہے۔ جس میں $\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots(\text{ن-ر}+1)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ر}}$ عام رقم ہے۔

کسی بھی دو رقمی جملہ کی قوت کو بلند کر کے پھیلانا مقصود ہو تو اس کا آسان ترین طریقہ یہ ہوگا کہ اس دو رقمی جملہ کو ایسی شکل میں بدل دیا جائے جس کی پہلی رقم اکائی ہو اور اس کے بعد مصرحۂ بالا طریقہ سے اسے پھیلا دیا جائے۔ مثلاً

$$(\text{لا}+\text{ما})^{\text{ن}} = \left\{\text{لا}\left(1+\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)\right\}^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}}\left(1+\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$$

بنظرِ سہولت $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کے عوض ی لکھ کر مسئلہ ثنائی استعمال کیا جا سکتا ہے۔

۳۔ طالب علم نے دیکھا ہوگا کہ $(\text{لا}+\text{ا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں جملہ ن + ۱ رقمیں ہوتی ہیں۔ (ر + ۱) ویں رقم جو کہ عام رقم کہلاتی ہے

$${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ن-ر}}\,\text{ا}^{\text{ر}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots(\text{ن-ر}+1)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}\,\text{لا}^{\text{ن-ر}}\,\text{ا}^{\text{ر}} \quad \text{ہے}$$

اور لا اور ا کو ان کے مناسب قوت نما دینے سے کوئی بھی معیّنہ رقم معلوم

کرلی جا سکتی ہے۔ کسی بھی خاص صورت میں جب یہ ضابطہ استعمال کیا جائے تو یہ بات نگاہ میں رکھنی چاہیے کہ ر کا قوت نما اور ج کی علامت زیرین (Suffix) دونوں ایک ہی ہوتے ہیں اور لا اور ر کے قوت نماؤں کا حاصل جمع ن ہے۔

۴- اگر ر کی جگہ (- ر) لکھا جائے تو

$$(\text{لا} - \text{ر})^{\text{ن}} = \text{لا}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_1 (-\text{ر})\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_2 (-\text{ر})^2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_3 (-\text{ر})^3\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \cdots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}} (-\text{ر})^{\text{ن}}$$

$$= \text{لا}^{\text{ن}} - {}^{\text{ن}}\text{ج}_1\,\text{ر}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_2\,\text{ر}^2\,\text{لا}^{\text{ن}-2} - {}^{\text{ن}}\text{ج}_3\,\text{ر}^3\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \cdots + (-1)^{\text{ن}}\,{}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}\,\text{ر}^{\text{ن}}$$

پس $(\text{لا} + \text{ر})^{\text{ن}}$ اور $(\text{لا} - \text{ر})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ کی رقمیں عدداً ایک ہی ہوتی ہیں لیکن $(\text{لا} - \text{ر})^{\text{ن}}$ میں وہ باری باری سے یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوتی ہیں اور آخری رقم مثبت یا منفی ہے بموجب اس کے کہ ن جفت ہے یا طاق۔

۵- جملہ $(1 + \text{لا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں اس کی ابتداء اور انتہا سے جو رقمیں مساوی بُعد پر واقع ہوتی ہیں ان کے سر مساوی ہوتے ہیں۔

جملہ کی ابتداء سے اگر شروع کریں تو (ر + ۱) ویں رقم کا سر ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ ہے۔ اور اس کی انتہا سے (ر + ۱) ویں جو رقم ہوتی ہے اس سے پہلے ن + ۱ - (ر + ۱) یا ن - ر رقمیں ہوتی ہیں۔ اس لئے اگر جملہ کی ابتداء سے ہم شمار کریں تو یہ آخر الذکر رقم (ن - ر + ۱) ویں رقم ہوتی ہے اور اس کا سر ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}-\text{ر}}$ ہوتا ہے جو کہ مجموعوں کے خواص کی رُو سے ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ کے مساوی ہوتا ہے۔

۶- جملہ $(1 + \text{لا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں سب سے بڑے یعنی اعظم سر کی تعیین۔

چونکہ جملہ کی عام رقم کا سر ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ ہے اس لئے ہمیں صرف یہی دریافت کرنا مقصود ہے کہ ر کی کس قیمت کے لئے ${}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ر}}$ اعظم ہے۔

مجموعوں کے خواص سے ظاہر ہے کہ جب ن ایک جفت عدد ہوتا ہے

تو اعظم رقم $^{ن}ج_{\frac{ن}{۲}}$ ہے اور جب ن ایک طاق عدد ہوتا ہے تو $^{ن}ج_{\frac{ن-۱}{۲}}$ اور $^{ن}ج_{\frac{ن+۱}{۲}}$ اعظم اور مساوی ہوتے ہیں۔

۷۔ جملہ $(لا + ل)^{ن}$ کے پھیلاؤ میں اعظم رقم کی تعیین۔

چونکہ $(لا + ل)^{ن} = لا^{ن}(۱ + \frac{ل}{لا})^{ن}$ اور $لا^{ن}$ جملہ $(۱ + \frac{ل}{لا})$ کے پھیلاؤ میں ہر ایک رقم کو ضرب دیتا ہے اس لئے کافی ہوگا کہ آخرالذکر جملہ کے پھیلاؤ میں سب سے بڑی رقم دریافت کی جائے۔

فرض کرو کہ (ر) ویں اور (ر + ۱) ویں رقمیں کوئی سی دو متواتر رقمیں ہیں۔ مسئلہ ثنائی سے ظاہر ہے کہ آخرالذکر اول الذکر کو $(\frac{ن-ر+۱}{ر} \times \frac{ل}{لا})$ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے یعنی $(\frac{ن+۱}{ر} - ۱)\frac{ل}{لا}$ سے ضرب دینے سے۔

جزوِ ضربی $\frac{ن+۱}{ر} - ۱$ گھٹتا جاتا ہے جیسے جیسے ر بڑھتا جاتا ہے۔

پس (ر + ۱) ویں رقم ر ویں رقم سے ہمیشہ بڑی نہیں ہوتی بلکہ صرف اُس وقت تک بڑی ہوتی ہے جس وقت تک کہ $(\frac{ن+۱}{ر} - ۱)\frac{ل}{لا}$ کی قیمت ۱ کے مساوی یا اس سے کم ہوتی ہے۔

$$اب \quad (\frac{ن+۱}{ر} - ۱)\frac{ل}{لا} > ۱ \quad تا حالیکہ \quad \frac{ن+۱}{ر} - ۱ > \frac{لا}{ل}$$

$$یعنی \quad \frac{ن+۱}{ر} > \frac{لا}{ل} + ۱ \quad یا \quad \frac{ن+۱}{\frac{لا}{ل}+۱} > ر$$

اگر $\frac{ن+۱}{\frac{لا}{ل}+۱}$ ایک صحیح عدد ہے تو اس کو پ سے تعبیر کرو۔ تب اگر ر = پ تو ضرب دینے والا جزو ۱ ہو جاتا ہے اور (پ + ۱) ویں رقم پ ویں رقم کے مساوی ہوتی ہے اور پھر دو رقمیں بقیہ سب رقموں سے بڑی ہوتی ہیں۔

اگر $\frac{ن+۱}{\frac{لا}{ل}+۱}$ صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ق سے تعبیر کرو تو مصرحۂ بالا شرط (یعنی $\frac{ن+۱}{\frac{لا}{ل}+۱} > ر$) کی تکمیل کے ساتھ ساتھ ر کی سب سے بڑی قیمت ق ہو سکتی ہے۔ پس اعظم رقم (ق + ۱) ویں رقم ہے۔
چونکہ یہاں اعظم رقم سے مراد عدداً اعظم رقم ہے اس لئے $(لا + ل)^{ن}$

سے متعلق جو تحقیق عمل میں آئی وہی $(\text{لا} - \text{ر})^{\text{ن}}$ پر بھی عائد کی جا سکتی ہے، لہذا دیے ہوئے دو رقمی جملہ کی دوسری رقم کی علامت پر غور کرنے کی ضرورت نہیں۔ لیکن اس موضوع کے عددی سوالوں کے حل کرنے میں عام ضابطہ سے کام نہیں لینا چاہیے بلکہ ہر سوال کو مصرحۂ بالا طریقہ پر علیحدہ علیحدہ حل کرنا چاہیے۔

۸۔ جملہ $(\text{ا} + \text{لا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں اس کی رقموں کے سروں کے حاصل جمع کی تعیین۔

تماثل $(\text{ا}+\text{لا})^{\text{ن}} = \text{ا} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{1}\,\text{لا} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{2}\,\text{لا}^{2} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{3}\,\text{لا}^{3} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$

میں لا کو ا کے مساوی لکھو۔ پس

$$2^{\text{ن}} = \text{ا} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{1} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{2} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{3} + \dots\ {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}$$

= جملہ کے پھیلاؤ کے سروں کا حاصل جمع

اس کا نتیجۂ صریح ہے $ {}^{\text{ن}}\text{ج}_{1} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{2} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{3} + \dots\ {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}} = 2^{\text{ن}} - 1$

یعنی ن چیزوں کے مجموعوں کی کُل تعداد $2^{\text{ن}} - 1$ جو مجموعوں کے خواص کی رُو سے بھی ثابت کیا جاتا ہے۔

۹۔ جملہ $(\text{ا} + \text{لا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں طاق رقموں کے سروں کا حاصل جمع جفت رقموں کے سروں کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔

تماثل $(\text{ا} + \text{لا})^{\text{ن}} = \text{ا} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{1}\,\text{لا} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{2}\,\text{لا}^{2} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{3}\,\text{لا}^{3} + \dots + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$ میں لا کو ‎-ا کے مساوی لکھو

تب $\therefore\ 0 = \text{ا} - {}^{\text{ن}}\text{ج}_{1} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{2} - {}^{\text{ن}}\text{ج}_{3} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{4} - {}^{\text{ن}}\text{ج}_{5} + \dots$

$$\therefore\ \text{ا} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{2} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{4} + \dots = {}^{\text{ن}}\text{ج}_{1} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{3} + {}^{\text{ن}}\text{ج}_{5} + \dots$$

$= \frac{1}{2}$ (حاصل جمع تمام سروں کا)

$= \frac{1}{2}(2^{\text{ن}}) = 2^{\text{ن}-1}$

۱۰۔ مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ۲ رقموں سے زیادہ والے جملوں کو بھی پھیلا سکتے ہیں۔ بطور مثال

$(\text{ا} - \text{لا} + \text{لا}^{2})^{4} = \{\text{ا} - (\text{لا} - \text{لا}^{2})\}^{4}$ ہے۔ اس کو بشکل $(\text{ا} - \text{ع})^{4}$ لکھو

یعنی $(\text{لا} - \text{لا}^{۲})$ کے عوض ع لکھو۔

چونکہ
$$(۱-ع)^{۴} = ۱ + ۴(-ع) + \frac{۳\times۴}{۲\times۱}(-ع)^{۲} + \frac{۲\times۳\times۴}{۳\times۲\times۱}(-ع)^{۳} + \frac{۱\times۲\times۳\times۴}{۴\times۳\times۲\times۱}(-ع)^{۴}$$
$$= ۱ - ۴ع + ۶ع^{۲} - ۴ع^{۳} + ع^{۴}$$
$$= ۱ - ۴(\text{لا} - \text{لا}^{۲}) + ۶(\text{لا} - \text{لا}^{۲})^{۲} - ۴(\text{لا} - \text{لا}^{۲})^{۳} + (\text{لا} - \text{لا}^{۲})^{۴}$$
$$= ۱ - ۴(\text{لا} - \text{لا}^{۲}) + ۶(\text{لا}^{۲} - ۲\text{لا}^{۳} + \text{لا}^{۴}) - ۴(\text{لا}^{۳} - ۳\text{لا}^{۴} + ۳\text{لا}^{۵} - \text{لا}^{۶}) + \text{لا}^{۴} - ۴\text{لا}^{۵} + ۶\text{لا}^{۶} - ۴\text{لا}^{۷} + \text{لا}^{۸}$$
$$= ۱ - ۴\text{لا} + ۱۰\text{لا}^{۲} - ۱۶\text{لا}^{۳} + ۱۹\text{لا}^{۴} - ۱۶\text{لا}^{۵} + ۱۰\text{لا}^{۶} - ۴\text{لا}^{۷} + \text{لا}^{۸}$$

سوالات ۱ (ا)

(۱) $(\text{ا} + \text{لا})^{ن}$ کے پھیلاؤ میں سب سے بڑی رقم کی قیمت دریافت کرو جبکہ $\text{ا} = \frac{۱}{۲}$، $\text{لا} = \frac{۱}{۳}$، $ن = ۹$

(۲) ثابت کرو کہ $(\text{لا} - \frac{۴}{\text{لا}^{۲}})^{۶}$ کے پھیلاؤ میں لا سے آزاد رقم ۲۴۰ ہے۔

(۳) بتاؤ کہ $(۱ + \text{لا})^{۲ن}$ کی وسطی رقم کا سر $(۱ + \text{لا})^{۲ن-۱}$ کی دو وسطی رقموں کے سروں کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔

(۴) $(۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۳})^{۵}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{۴}$ کا سر دریافت کرو۔

(۵) اگر ${}^{ن}ج_{۰}$، ${}^{ن}ج_{۱}$، ${}^{ن}ج_{۲}$ ..... ${}^{ن}ج_{ن}$، $(۱ + \text{لا})^{ن}$ کے پھیلاؤ میں رقموں کے سروں کو علی الترتیب تعبیر کرتے ہیں تو ثابت کرو کہ
$$({}^{ن}ج_{۰})^{۲} + ({}^{ن}ج_{۱})^{۲} + ({}^{ن}ج_{۲})^{۲} + \ldots + ({}^{ن}ج_{ن})^{۲} = \frac{|۲ن}{|ن\ |ن}$$

۱۱- مسئلہ ثنائی کا اطلاق مثبت صحیح قوت نما کے علاوہ کسی بھی قوت نما کے ساتھ ہوسکتا ہے۔ لیکن ان صورتوں میں جملہ کے پھیلاؤ کی رقمیں بلحاظ تعداد محدود نہیں ہوتیں۔

ذیل میں عام صورت کے لئے آئیلر (Euler) کا ثبوت دیا جاتا ہے۔

صورت (ا) — جبکہ قوت نما ایک مثبت کسر ہے۔

م کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو، مثبت یا منفی، صحیح یا کسری، فرض کرو کہ

علامت ف (م) سلسلہ $\text{۱} + \text{م لا} + \frac{\text{م(م-۱)}}{\text{۱×۲}}\text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{م(م-۱)(م-۲)}}{\text{۱×۲×۳}}\text{لا}^{\text{۳}} + \ldots$

کو تعبیر کرتی ہے۔

تب علامت ف (ن) سلسلہ

$$\text{۱} + \text{ن لا} + \frac{\text{ن(ن-۱)}}{\text{۱×۲}}\text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{ن(ن-۱)(ن-۲)}}{\text{۱×۲×۳}}\text{لا}^{\text{۳}} + \ldots$$

کو تعبیر کریگی۔

اگر ہم ان دونوں سلسلوں کو باہمدیگر ضرب دینگے تو حاصل ضرب لا کی صعودی قوتوں کا ایک دوسرا سلسلہ ہوگا جس کے سر شکل کے اعتبار سے غیر متغیر ہونگے م اور ن خواہ کچھ ھی ھوں۔

اس حاصل ضرب کی یہ غیر متغیر شکل دریافت کرنے کے لئے ہم م اور ن کو موزوں اور سہل ترین قیمتیں دینگے۔ فرض کرو کہ م اور ن مثبت صحیح عدد ہیں۔ اس حالت میں ف (م)، $\text{(۱+لا)}^{\text{م}}$ کی پھیلائی ہوئی شکل ہوگی اور ف (ن)، $\text{(۱+لا)}^{\text{ن}}$ کی پھیلائی ہوئی شکل پس

$$\text{ف(م)} \times \text{ف(ن)} = \text{(۱+لا)}^{\text{م}} \times \text{(۱+لا)}^{\text{ن}} = \text{(۱+لا)}^{\text{م+ن}}$$

لیکن جبکہ م اور ن مثبت صحیح عدد ہوتے ہیں تو $\text{(۱+لا)}^{\text{م+ن}}$

$$\text{۱} + \text{(م+ن) لا} + \frac{\text{(م+ن)(م+ن-۱)}}{\text{۱×۲}}\text{لا}^{\text{۲}} + \ldots$$ ہے

پس ف (م) × ف (ن) حاصل ضرب کی بہرصورت پھیلائی ہوئی شکل ہے، م اور ن کی قیمتیں خواہ کچھ ہی ہوں۔ اور ہمارے سابقہ طریق کتابت کے مطابق ہم اس حاصل ضرب کو ف (م + ن) سے تعبیر کرسکتے ہیں۔ پس م اور ن کی تمام قیمتوں کے لئے

$$\text{ف(م)} \times \text{ف(ن)} = \text{ف(م+ن)}$$

معہذا $\text{ف(م)} \times \text{ف(ن)} \times \text{ف(پ)} = \text{ف(م+ن)} \times \text{ف(پ)}$

$= \text{ف(م+ن+پ)}$

اس استدلال سے $\text{ف(م)} \times \text{ف(ن)} \times \text{ف(پ)} \ldots$ ک

اجزائے ضربی تک

$$= \text{ف}\ (\text{م} + \text{ن} + \text{پ} + \ldots\ldots \text{ک رقموں تک})$$

م، ن، پ..... مقادیر میں سے ہر ایک کو $\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}$ کے مساوی لو جہاں ھ اور ک مثبت صحیح اعداد ہیں

$$\therefore \quad \left\{ \text{ف}\left(\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\right) \right\}^{\text{ک}} = \text{ف}\ (\text{ھ})$$

مگر چونکہ ھ ایک مثبت صحیح عدد ہے $\text{ف}\ (\text{ھ}) = (۱ + \text{لا})^{\text{ھ}}$

$$\therefore \quad (۱ + \text{لا})^{\text{ھ}} = \left\{ \text{ف}\left(\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\right) \right\}^{\text{ک}}$$

$$(۱ + \text{لا})^{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}} = \text{ف}\left(\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\right)$$

لیکن $\text{ف}\left(\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\right)$ تعبیر ہے سلسلہ $۱ + \frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\text{لا} + \frac{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\left(\frac{\text{ھ}}{\text{ک}} - ۱\right)}{۲ \times ۱}\text{لا}^۲ \ldots\ldots$ کی

$$\therefore \quad (۱ + \text{لا})^{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}} = ۱ + \frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\text{لا} + \frac{\frac{\text{ھ}}{\text{ک}}\left(\frac{\text{ھ}}{\text{ک}} - ۱\right)}{۲ \times ۱}\text{لا}^۲ + \ldots\ldots$$

اس سے مسئلہ ثنائی کا ثبوت بہم پہنچایا جاتا ہے جبکہ قوت نما کوئی بھی مثبت کسر ہوتی ہے۔

واضح ہو کہ مسئلہ ثنائی کے ہر دو رقمی جملہ کو ہم $(۱ + \text{لا})^{\text{ن}}$ کی صورت میں ڈھال سکتے ہیں پس اگر $(۱ + \text{لا})^{\text{ن}}$ کے لئے جو بات ثابت کی جاتی ہے اس کا اطلاق عام ہوتا ہے۔

صورت (ب)۔ جبکہ قوت نما کوئی بھی منفی مقدار ہے۔

یہ ثابت ہو چکا ہے کہ $\text{ف}\ (\text{م}) \times \text{ف}\ (\text{ن}) = \text{ف}\ (\text{م} + \text{ن})$، م اور ن کی تمام قیمتوں کے لئے۔ اگر م کے عوض - ن لکھا جائے جس میں ن مثبت ہے تو

$$\text{ف}\ (-\text{ن}) \times \text{ف}\ (\text{ن}) = \text{ف}\ (-\text{ن} + \text{ن}) = \text{ف}\ (۰) = ۱$$

اس لئے کہ پھیلاؤ کے سلسلہ کی تمام رقمیں سوائے پہلی رقم کے کالعدم ہو جاتی ہیں۔

$$\therefore \quad \frac{۱}{\text{ف}\ (\text{ن})} = \text{ف}\ (-\text{ن})$$

لیکن ف (ن) = (۱ + لا)^ن ، ن کی کسی بھی مثبت قیمت کے لئے

$$\therefore \frac{1}{(1+\text{لا})^{\text{ن}}} = \text{ف}(-\text{ن})$$

یا

$$(1+\text{لا})^{-\text{ن}} = \text{ف}(-\text{ن})$$

لیکن از روئے قرار داد ف (-ن) سلسلہ

$$1 + (-\text{ن})\,\text{لا} + \frac{(-\text{ن})(-\text{ن}-1)}{1\times 2}\,\text{لا}^2$$

کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\therefore (1+\text{لا})^{-\text{ن}} = 1 + (-\text{ن})\,\text{لا} + \frac{(-\text{ن})(-\text{ن}-1)}{1\times 2}\,\text{لا}^2 + \ldots\ldots$$

جس سے مسئلہ ثنائی کا کسی بھی منفی قوت نما کے لئے ثبوت مہیا ہو جاتا ہے۔
پس مسئلہ ثنائی مکمل طور پر ثابت ہو جاتا ہے۔

۱۲- واضح ہو کہ مصرحۂ بالا ثبوت میں جو "معادل شکلوں کے استقلال" کے اصول پر مبنی ہے سلسلوں کے استدقاق و اتساع کی بحث نہیں کی گئی۔ ہم اس پہلو پر ایک سرسری نظر ڈالنا چاہتے ہیں۔

ف (م) کو پھیلانے سے جو جملہ حاصل ہوتا ہے اس کی رقموں کی تعداد متناہی ہوتی ہے جب تک کہ م ایک مثبت صحیح عدد ہے لیکن دوسری تمام صورتوں میں جیساکہ اس فصل کے آخری حصہ میں دیکھینگے اس جملہ کی رقموں کی تعداد نامتناہی ہوتی ہے۔ پس یہ معلوم ہونا چاہیے کہ ف (م) × ف (ن) = ف (م+ن) لکھتے ہیں تو اس کا مفہوم کیا ہے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ جب لا > ۱ ف (م)، ف (ن)، اور ف (م+ن) یہ تینوں سلسلے مستدق ہوتے ہیں۔ اور ف (م+ن) {ف (م) × ف (ن)} کا صحیح حسابی معادل ہوتا ہے۔ لیکن جب لا < ۱ تو یہ تینوں سلسلے متسع ہوتے ہیں، اور ہم صرف یہی دعوے کر سکتے ہیں کہ اگر ہم ف (م) اور ف (ن) کے ذریعہ جن سلسلوں کی تعبیر کرتے ہیں ان سلسلوں کو ایک دوسرے سے ضرب دیں تو حاصل ضرب

کی پہلی ر رقمیں ف (م + ن) سے تعبیر ہونے والے سلسلہ کی پہلی ر رقموں سے مطابقت رکھتی ہیں۔ ر کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو۔

استدقاق کے امتحان کے سب سے زیادہ موثر طریقوں میں ڈاالمبایر (D'Alembert) کا طریقہ ہے جو سلسلہ کی متواتر رقموں کی نسبت کے امتحان پر مبنی ہے۔ اگر $ع_1 + ع_2 + ع_3 + ... ع_ن$ ایک نا متناہی سلسلہ ہے تو وہ مستدق یا متسع ہوگا بلحاظ اس کے کہ $\underset{ن \to \infty}{نہا} \left(\frac{ع_{ن+1}}{ع_ن}\right)$ عدداً ۱ سے کم یا زیادہ ہے۔ لیکن اگر وہ ۱ ہو تو مزید امتحان کی ضرورت ہوگی۔

ظاہر ہے کہ ن جب کسری یا منفی ہوتا ہے تو $(۱ + لا)^ن$ کے پھیلاؤ میں عام رقم کو پوری صراحت کے ساتھ

$$\frac{ن (ن-۱) (ن-۲) \cdots (ن-ر+۱)}{\lfloor ر} لا^ر$$

لکھنا چاہیے اس لئے کہ علامت $^نج_ر$ اب استعمال نہیں کی جا سکتی۔

معہذا عام رقم کا سر کبھی معدوم نہیں ہو سکتا ہے جب تک کہ اس کے شمار کنندہ کے اجزائے ضربی میں سے ایک جزو صفر نہ ہو۔ پس یہ سلسلہ ر-ویں رقم پر اس وقت ختم ہو جائیگا جبکہ ن - ر + ۱ صفر ہوگا۔ یعنی ر = ن + ۱۔ لیکن چونکہ ر ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ یہ مساوات صرف اسی وقت ممکن ہوگی جبکہ ن بھی ایک مثبت اور صحیح عدد ہوگا۔ پس اس سے واضح ہے کہ مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلاؤ رقموں کی محدود تعداد میں (یعنی ن + ۱ رقموں تک) صرف ایسی صورت میں ہوتا ہے جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے لیکن بقیہ تمام صورتوں میں رقموں کی تعداد نا متناہی ہوتی ہے۔

سوالات ۱ (ب)

(۱) بتاؤ کہ $(۱ - لا)^{\frac{۵}{۲}}$ کو جب مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلاتے ہیں تو اس کی تمام رقمیں بالآخر ایک ہی علامت کی ہوتی ہیں۔ دریافت کرو کہ وہ علامت

کیا ہے، لا کہاں مثبت ہے اور کہاں سے وہ شروع ہوتا ہے۔

(۲) $(۱ + لا)^{\frac{۲۳}{۴}}$ کے پھیلاؤ میں سب سے پہلی منفی رقم کونسی ہے۔

(۳) $(۳ + ۲^{۴} لا)^{\frac{۱۱}{۴}}$ کے پھیلاؤ میں ساتویں رقم کو اس کی سادہ ترین شکل میں لکھو۔

(۴) بسیط رقّاص کے اہتزاز کا وقتِ دوران $و = ۲\pi\sqrt{\frac{ل}{ج}}$ ہے جس میں فرض کرو و کی پیمائش ثانیوں میں ہوتی ہے، ل کی فٹوں میں اور ج = ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ - اگر اس رقّاص کا طول لا فٹ بڑھ جائے (جہاں لا بمقابلہ ل ایک بہت ہی قلیل مقدار ہے) تو بتاؤ کہ وقتِ اہتزاز بقدر $\frac{\pi\, لا}{۱۲\sqrt{ل ج}}$ بڑھ جائیگا، اگر چھوٹی مقادیر کے پہلے رتبہ تک ہی جواب صحیح نکالا جائے۔

(۵) مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ثابت کرو کہ

$$\left(\frac{۹}{۱۰}\right)^{\frac{۴}{۵}} = ۰٫۹۱۹۱۶۶۲$$

۱۳ - اگر ہم $(۱ - لا)^{-۲}$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلائیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(۱ - لا)^{-۲} = ۱ + ۲لا + ۳لا^{۲} + ۴لا^{۳} + \ldots\ldots$$

لیکن ہمیں معلوم ہے کہ یہ نتیجہ صرف اُس صورت میں صحیح ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمت ۱ سے کم ہوتی ہے - پس ہمیں یہ دریافت کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے کہ کیا ہم ہمیشہ مندرجۂ ذیل پھیلاؤ

$$(۱ + لا)^{ن} = ۱ + ن لا + \frac{ن(ن - ۱)}{۱ \times ۲} لا^{۲} + \ldots$$

کو صادق مان سکتے ہیں، اور اگر نہیں تو کن شرائط کے تحت یہ پھیلاؤ صحیح تصور ہو سکتا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ن = -۱

تب $(\text{۱} - \text{لا})^{-\text{۱}} = \text{۱} + \text{لا} + \text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۳}} + \text{لا}^{\text{۴}} + \ldots\ldots$

اگر اس مساوات میں ہم لا = ۲ لکھیں تو

$(\text{۱} - \text{۲})^{-\text{۱}} = \text{۱} + \text{۲} + \text{۲}^{\text{۲}} + \text{۲}^{\text{۳}} + \text{۲}^{\text{۴}} + \ldots\ldots$

لیکن یہ نتیجہ صریحاً غلط ہے - پس اس سے صاف ظاہر ہوتا ہے کہ ہم

$$\text{۱} + \text{ن لا} + \frac{\text{ن (ن - ۱)}}{\text{۱} \times \text{۲}}\,\text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{ن (ن - ۱) (ن - ۲)}}{\text{۱} \times \text{۲} \times \text{۳}}\,\text{لا}^{\text{۳}} + \ldots\ldots$$

کو ہر صورت میں $(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن}}$ کا صحیح حسابی معادل نہیں تصور کر سکتے ہیں -

$\text{۱} + \text{لا} + \text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا}^{\text{۳}} + \text{لا}^{\text{۴}} + \ldots$ چونکہ ایک ہندسی سلسلہ ہے - اس سلسلہ کی پہلی ر رقموں کا حاصل جمع $= \dfrac{\text{۱} - \text{لا}^{\text{ر}}}{\text{۱} - \text{لا}}$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{لا}} - \frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\text{۱} - \text{لا}}$$

اور جب لا عدداً ۱ سے چھوٹا ہوتا ہے تو ر کو کافی بڑا لینے سے ہم $\dfrac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\text{۱} - \text{لا}}$ کو جس قدر چھوٹا چاہیں بنا سکتے ہیں - یعنے اسی سلسلہ کی اگر کافی رقمیں لی جائیں تو ان کے حاصل جمع کو $\dfrac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{لا}}$ سے جس قدر کم مختلف کہ ہم بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں - لیکن جب لا عدداً ۱ سے بڑا ہوتا ہے تو $\dfrac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\text{۱} - \text{لا}}$ کی قیمت ر کے ساتھ بڑھتی جاتی ہے اور اس لئے سلسلۂ مصرحہ بالا کی خواہ کتنی بھی رقمیں لی جائیں اس کے حاصل جمع کی قیمت $\dfrac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{لا}}$ کے تقریباً مساوی نہیں ہو سکتی ہے -

بذریعہ مسئلۂ ثنائی جب $(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن}}$ لا کی صعودی قوتوں میں پھیلایا جاتا ہے تو اس کا سلسلہ مستدق اور اس لئے حساباً قابلِ فہم ہوتا ہے صرف اس صورت میں جبکہ لا کی قیمت ۱ سے کم ہوتی ہے اگر ہم ڈالیمبر والا متواتر رقموں کی نسبت کے امتحان کا طریقہ استعمال کریں تو معلوم ہوگا کہ چونکہ (ر + ۱) ویں رقم (جس کو ہم $\text{ع}_{\text{ر+۱}}$ لکھینگے) اور (ر) ویں رقم (جس کو $\text{ع}_{\text{ر}}$ لکھینگے) میں نسبت

$$\frac{\text{ع}_{\text{ر+۱}}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \frac{\dfrac{\text{ن (ن - ۱) (ن - ۲)} \ldots \text{(ن - ر + ۱)}}{\lfloor\text{ر}}\,\text{لا}^{\text{ر}}}{\dfrac{\text{ن (ن - ۱) (ن - ۲)} \ldots \text{(ن - ر + ۲)}}{\lfloor\text{(ر - ۱)}}\,\text{لا}^{\text{ر-۱}}}$$

$$= \frac{(\text{ن} - \text{ر} + 1)\,\text{لا}}{\text{ر}} = \left\{ \frac{(\text{ن} + 1) - \text{ر}}{\text{ر}} \right\} \text{لا}$$

$$= \left(\frac{\text{ن} + 1}{\text{ر}} - 1 \right) \text{لا}$$

اس لئے $\underset{\text{ر} \to \infty}{\text{نہا}} \frac{\text{ع}_{\text{ر}+1}}{\text{ع}_{\text{ر}}} = \underset{\text{ر} \to \infty}{\text{نہا}} \left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}} - 1 \right) \text{لا} = - \text{لا}$

کیونکہ ن ایک محدود عدد مانا گیا ہے اور ر نامتناہی بڑا ہو سکتا ہے۔ یہ نسبت عدداً ۱ سے چھوٹی ہوتی ہے جبکہ لا، ۱ سے کم ہوتا ہے۔ بدیں وجہ $(1 + \text{لا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ کا سلسلہ متدق ہوتا ہے جبکہ لا عدداً ۱ سے چھوٹا ہوتا ہے۔

لیکن اگر لا کی قیمت ۱ سے بڑی ہو تو چونکہ اس سلسلہ کی عام رقم میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ شامل ہے اس لئے ر کو کافی بڑا لینے سے $\text{لا}^{\text{ر}}$ کو ہم کسی بھی معین محدود مقدار سے زیادہ بڑا بنا سکتے ہیں۔ پس سلسلۂ مذکور کی قیمت غیر محدود ہوتی ہے۔ لہٰذا $(1 + \text{لا})^{\text{ن}}$ کو لا کی صعودی طاقتوں میں ایک نامتناہی سلسلہ کی شکل میں پھیلانے کا حسابی مفہوم کچھ نہیں جبکہ لا کی قیمت ۱ سے بڑی ہوتی ہے۔

یہ بات یاد رکھنے کے قابل ہے کہ ہم $(\text{لا} + \text{ما})^{\text{ن}}$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ہمیشہ پھیلا سکتے ہیں اس لئے کہ اگر لا سے ما بڑا ہو تو $(\text{لا} + \text{ما})^{\text{ن}}$ کو $\text{ما}^{\text{ن}} \left(1 + \frac{\text{لا}}{\text{ما}}\right)^{\text{ن}}$ لکھ کر اور اگر ما سے لا بڑا ہو تو $\text{لا}^{\text{ن}} \left(1 + \frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}}$ لکھ کر پھیلا سکتے ہیں۔

۱۴۔ $(1 - \text{لا})^{-\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں عام رقم کی سادہ ترین شکل۔

واضح ہے کہ اس کی (ر + ۱) ویں رقم $= \frac{(-\text{ن})(-\text{ن}-1)(-\text{ن}-2)\cdots(-\text{ن}-\text{ر}+1)}{\lfloor \text{ر}} (-\text{لا})^{\text{ر}}$

$$= (-1)^{\text{ر}} \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(\text{ن}+2)\cdots(\text{ن}+\text{ر}-1)}{\lfloor \text{ر}} (-1)^{\text{ر}} \text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= (-۱)^{۲\text{ر}} \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)\cdots(\text{ن}+\text{ر}-۱)}{\underline{\text{ر}|}} \text{لا}^{\text{ر}}$$

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)\cdots(\text{ن}+\text{ر}-۱)}{\underline{\text{ر}|}} \text{لا}^{\text{ر}}$$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ $(۱-\text{لا})^{-\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں ہر ایک رقم مثبت ہوتی ہے۔

مندرجۂ ذیل پھیلاؤ قابلِ یادداشت ہیں :—

$$(۱-\text{لا})^{-۱} = ۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۳} + \cdots + \text{لا}^{\text{ر}} + \cdots$$

$$(۱-\text{لا})^{-۲} = ۱ + ۲\text{لا} + ۳\text{لا}^{۲} + ۴\text{لا}^{۳} + \cdots (\text{ر}+۱)\,\text{لا}^{\text{ر}} + \cdots$$

$$(۱-\text{لا})^{-۳} = ۱ + ۳\text{لا} + ۶\text{لا}^{۲} + ۱۰\text{لا}^{۳} + \cdots + \frac{(\text{ر}+۱)(\text{ر}+۲)}{۲\times۱}\text{لا}^{\text{ر}} + \cdots$$

۱۵- تقریبی پھیلاؤ —— عملی حسابوں میں مندرجۂ ذیل تقریبی ضابطے عموماً کافی ہوتے ہیں جبکہ لا اور ما بمقابلۂ اکائی بہت ہی چھوٹے ہوتے ہیں :—

$$(۱ \pm \text{لا})^{\text{ن}} = ۱ \pm \text{ن}\,\text{لا}$$ ن مثبت ہو سکتا ہے یا منفی

$$(۱\pm\text{لا})(۱\pm\text{ما}) = ۱ \pm \text{لا} \pm \text{ما}$$

مثال (۱) — اگر لا اس قدر چھوٹا ہے کہ اس کا مکعب اور اس سے زیادہ قوتیں ناقابلِ لحاظ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{(۱-\text{لا})^{-\frac{۵}{۲}} + (۱۶+۸\text{لا})^{\frac{۱}{۲}}}{(۱+\text{لا})^{-\frac{۱}{۲}} + (۲+\text{لا})^{۲}} = ۱ + \frac{۲۳}{۲۴}\text{لا}^{۲}$$ [جامعۂ لندن]

مثال کے ہر ثنائی جملہ کو علیحدہ علیحدہ $\text{لا}^{۲}$ تک پھیلانے سے

$$(۱-\text{لا})^{-\frac{۵}{۲}} = ۱ + \left(-\frac{۵}{۲}\right)(-\text{لا}) + \frac{\left(-\frac{۵}{۲}\right)\left(-\frac{۵}{۲}-۱\right)}{\underline{۲|}}(-\text{لا})^{۲} + \cdots$$

$$= ۱ + \frac{۵}{۲}\text{لا} + \frac{۳۵}{۸}\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots$$

$$(۱۶ + ۸\text{لا})^{\frac{۱}{۲}} = ۱۶^{\frac{۱}{۲}}\left(۱ + \frac{\text{لا}}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = ۴\left(۱ + \frac{۱}{۴}\text{لا} - \frac{۱}{۳۲}\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots\right)$$

$$(۱ + \text{لا})^{-\frac{۱}{۲}} = ۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۳}{۸}\text{لا}^{۲} \ldots\ldots\ldots$$

$$(۲ + \text{لا})^{۲} = ۴ + ۴\text{لا} + \text{لا}^{۲}$$

$$\text{پس دی ہوئی کسر} = \frac{۱ + \frac{۵}{۲}\text{لا} + \frac{۳۵}{۸}\text{لا}^{۲} + \ldots + ۴ + \text{لا} - \frac{۱}{۸}\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots}{۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا} + \frac{۳}{۸}\text{لا}^{۲} - \ldots + ۴ + ۴\text{لا} + \text{لا}^{۲}}$$

$$= \frac{۵ + \frac{۷}{۲}\text{لا} + \frac{۱۷}{۴}\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots}{۵ + \frac{۷}{۲}\text{لا} + \frac{۱۱}{۸}\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots}$$

$$= \frac{۱}{۵}\left(۵ + \frac{۷}{۲}\text{لا} + \frac{۱۷}{۴}\text{لا}^{۲} + \ldots\right)\left(۱ + \frac{۷}{۱۰}\text{لا} + \frac{۱۱}{۴۰}\text{لا}^{۲} + \ldots\right)^{-۱}$$

$$= \frac{۱}{۵}\left(۵ + \frac{۷}{۲}\text{لا} + \frac{۱۷}{۴}\text{لا}^{۲} + \ldots\right)\left\{۱ - \left(\frac{۷}{۱۰}\text{لا} + \frac{۱۱}{۴۰}\text{لا}^{۲}\right) + \left(\frac{۷}{۱۰}\text{لا} + \frac{۱۱}{۴۰}\text{لا}^{۲}\right)^{۲} + \ldots\right\}$$

$$= \frac{۱}{۵}\left(۵ + \frac{۷}{۲}\text{لا} + \frac{۱۷}{۴}\text{لا}^{۲} + \ldots\right)\left\{۱ - \left(\frac{۷}{۱۰}\text{لا} - \frac{۴۳}{۲۰۰}\text{لا}^{۲}\right) + \ldots\right\}$$

$$= \frac{۱}{۵}\left(۵ + \frac{۱۷}{۴}\text{لا}^{۲} - \frac{۴۹}{۲۰}\text{لا}^{۲} + \frac{۴۳}{۴۰}\text{لا}^{۲} + \ldots\right)$$

$$= \frac{۱}{۵}\left(۵ + \frac{۱۱۵}{۴۰}\text{لا}^{۲} + \ldots\right) = ۱ + \frac{۲۳}{۴۰}\text{لا}^{۲} + \ldots\ldots$$

مثال (۲)۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$۱ + \frac{۲۱}{۸} + \left(\frac{۲۱}{۸} \times \frac{۲۷}{۱۶}\right) + \left(\frac{۲۱}{۸} \times \frac{۲۷}{۱۶} \times \frac{۳۳}{۲۴}\right) + \left(\frac{۲۱}{۸} \times \frac{۲۷}{۱۶} \times \frac{۳۳}{۲۴} \times \frac{۳۹}{۳۲}\right) + \ldots\ldots$$

ایک دو رقمی سلسلہ ہے اور اس کی قیمت دریافت کرو۔ (جامعہ لندن)

فرض کرو کہ پہلی تین رقمیں $(۱ + \text{لا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ کی رقمیں ہیں۔

تب $\text{ن لا} = \frac{۲۱}{۸}$ اور $\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲} \times \text{لا}^{۲} = \frac{۲۱}{۸} \times \frac{۲۷}{۱۶}$

یعنی $ن\,لا = \frac{۲۱}{۸}$ اور $\frac{ن^{۲}\,لا^{۲}}{\underline{|۲}} - \frac{ن\,لا^{۲}}{\underline{|۲}} = \frac{۲۱}{۸} \times \frac{۲۷}{۱۶}$

پس $\left(\frac{۲۱}{۸}\right)^{۲} \frac{۱}{\underline{|۲}} - \frac{۲۱}{۸}\,لا\,\frac{۱}{\underline{|۲}} = \frac{۲۱}{۸} \times \frac{۲۷}{۱۶}$

یعنی $\frac{۲۱}{۸} - لا = \frac{۲۷}{۸}$

اور $لا = \frac{۲۱}{۸} - \frac{۲۷}{۸} = -\frac{۳}{۴}$

اس قیمت کو پہلی مساوات میں داخل کرنے سے $ن = -\frac{۷}{۲}$

$$اب\ \left(۱ - \frac{۳}{۴}\right)^{-\frac{۷}{۲}} = ۱ + \left(-\frac{۷}{۲}\right)\left(-\frac{۳}{۴}\right) + \frac{-\frac{۷}{۲}\left(-\frac{۷}{۲} - ۱\right)}{\underline{|۲}}\left(-\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$$

$$+ \frac{-\frac{۷}{۲}\left(-\frac{۷}{۲} - ۱\right)\left(-\frac{۷}{۲} - ۲\right)}{\underline{|۳}}\left(-\frac{۳}{۴}\right)^{۳}$$

$$+ \frac{-\frac{۷}{۲}\left(-\frac{۷}{۲} - ۱\right)\left(-\frac{۷}{۲} - ۲\right)\left(-\frac{۷}{۲} - ۳\right)}{\underline{|۴}}\left(-\frac{۳}{۴}\right)^{۴} + \cdots$$

$$= ۱ + \frac{۲۱}{۸} + \left(\frac{۲۷}{۱۶} \times \frac{۲۱}{۸}\right) + \left(\frac{۳۳}{۲۴} \times \frac{۲۷}{۱۶} \times \frac{۲۱}{۸}\right) + \left(\frac{۳۹}{۳۲} \times \frac{۳۳}{۲۴} \times \frac{۲۱}{۸}\right) + \cdots$$

جس سے ظاہر ہے کہ سلسلہ زیرِ بحث $\left(۱ - \frac{۳}{۴}\right)^{-\frac{۷}{۲}}$ اور اس لئے اس کی قیمت

$$\left(\frac{۱}{۴}\right)^{-\frac{۷}{۲}} = (۴)^{\frac{۷}{۲}} = (۲)^{۷} = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$$

$= ۱۲۸$ ہے۔

سوالات عـــ (ج)

اعشاریہ کے پانچویں مقام تک مندرجۂ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو:—

(۱) $\sqrt[۳]{۱۰۰۳}$ (۲) $(۶۳۰)^{-\frac{۳}{۴}}$

اگر لا اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اس سے بلند تر قوتیں ناقابلِ لحاظ سمجھی جاسکتی ہیں تو ذیل کے جملوں کی قیمت دریافت کرو:-

$$\frac{\left(1+\frac{2}{3}\text{لا}\right)^{-5} \times \left(4+3\text{لا}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(4+\text{لا}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۳)$$

$$\frac{\sqrt[4]{1-\frac{3}{5}\text{لا}} + \left(1+\frac{5}{6}\text{لا}\right)^{-2}}{\sqrt[3]{1+2\text{لا}} + \sqrt[5]{1-\frac{\text{لا}}{2}}} \qquad (۴)$$

(۵) ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^{\text{ن}} = 1 + \text{ن}\left(1-\frac{1}{\text{لا}}\right) + \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2!}\left(1-\frac{1}{\text{لا}}\right)^{2} + \cdots\cdots$$

(۶) $\left(2\text{لا}^{2}-\frac{1}{\text{لا}}\right)^{2\text{ر}}$ کے پھیلاؤ میں لا کا سر معلوم کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ $\sqrt{1+\text{لا}}$ کو اگر $1+\frac{\text{لا}}{2}$ کے مساوی لکھیں تو جو خطا واقع ہوگی $\frac{\text{لا}^{2}}{8}$ سے کم ہوگی۔

(۸) اگر لا چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ $\dfrac{(1+\text{لا})^{\frac{3}{2}}-(1-\text{لا})^{-\frac{3}{2}}}{6+9\text{لا}}$ کے لئے $\frac{1}{4}\text{لا}^{2}+\frac{13}{32}\text{لا}^{4}$ ایک تقریبی جملہ ہے۔

۱۶ $(1+\text{لا})^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں عدداً سب سے بڑی رقم دریافت کرو جبکہ ن کوئی سی منطق قیمت رکھتا ہو۔

چونکہ یہاں سب سے بڑی رقم کی عددی قیمت سے بحث ہے ہم لا کو سارے پھیلاؤ میں مثبت تصور کرینگے۔

صورت (۱)۔ فرض کرو کہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ پھیلاؤ کی (ر + ۱) ویں رقم ر- ویں رقم کو $\frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}}\text{لا}$ یعنی $\left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ر}}-1\right)\text{لا}$ کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

اور اس لئے رقمیں بڑی ہوتی جاتی ہیں تا وقتیکہ

$\left(\frac{ن+۱}{ر}-۱\right)لا > ۱$ یعنی $\frac{(ن+۱)لا}{ر} > ۱+لا$ یا $ر < \frac{(ن+۱)لا}{۱+لا}$

اگر $\frac{(ن+۱)لا}{۱+لا}$ ایک صحیح عدد ہو تو اس کو پ سے تعبیر کرو۔ تب اگر ر = پ تو ضرب دینے والا جزوِ ضربی ۱ ہوتا ہے اور اس لئے (پ + ۱) ویں رقم پ۔ ویں رقم کے مساوی ہوتی ہے اور یہ رقمیں کوئی سی اور رقم سے بڑی ہوتی ہیں۔

اگر $\frac{(ن+۱)لا}{۱+لا}$ ایک صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصّہ کو ق سے تعبیر کرو تب ر کی سب سے بڑی قیمت ق ہوگی اور (ق + ۱) ویں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

صورت (۲) ۔ فرض کرو کہ ن ایک مثبت کسر ہے۔

مثل سابق ر۔ ویں رقم کو $\left(\frac{ن+۱}{ر}-۱\right)$ کے ساتھ ضرب دینے سے (ر + ۱) ویں رقم حاصل ہوتی ہے۔

(ا) اگر لا اکائی سے بڑا ہو تو ر کو بڑھانے سے متذکرۂ بالا ضرب دینے والے جزوِ ضربی کو ہم - لا کے جس قدر قریب بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ پس ایک معیّن رقم کے بعد ہر ایک رقم اس سے ٹھیک پیشتر کی رقم کا عدداً لاگنا ہوتی ہے۔ لہٰذا پھیلاؤ کی رقمیں مسلسل بڑی ہوتی جائینگی اور سب سے بڑی کوئی رقم نہ ہو سکیگی۔

(ب) اگر لا اکائی سے کم ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ ضرب دینے والا جزوِ ضربی مثبت رہتا ہے اور گھٹتا جاتا ہے یہاں تک کہ ر > ن + ۱ - اس کے بعد سے وہ منفی ہو جاتا ہے لیکن ہمیشہ عدداً ۱ سے کم رہتا ہے۔ اس لئے پھیلاؤ میں ایک سب سے بڑی رقم ہوگی۔

ضرب دینے والا جزوِ ضربی ۱ سے بڑا ہوگا تاوقتیکہ $\frac{(ن+۱)لا}{۱+لا} > لا$۔

اگر $\frac{(ن+۱)لا}{۱+لا}$ ایک صحیح عدد ہو تو اس کو پ سے تعبیر کرو۔ تب صورت (۱) کی طرح (پ + ۱)۔ ویں رقم پ۔ ویں رقم کے مساوی ہوگی اور یہ

دونوں رقمیں دوسری سب رقموں سے بڑی ہونگی۔

اگر $\frac{(ن+1)لا}{1+لا}$ صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ اس کا صحیح حصہ ق ہے۔ تب (ق+1) ویں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

صورت (۳)۔ فرض کرو ن منفی ہے اور ن = -م اس لئے م مثبت ہے۔ تب ضرب دینے والے جزوِ ضربی کی عددی قیمت $\frac{م+ر-1}{ر}$ لا ہے یعنی $(\frac{م-1}{ر}+1)$ لا ہے۔

(ا) اگر لا اکائی سے بڑا ہو تو صورت (۲) کی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ پھیلاؤ کے سلسلہ میں سب سے بڑی رقم کوئی موجود نہیں ہے۔

(ب) اگر لا اکائی سے چھوٹا ہو تو ضرب دینے والا جزوِ ضربی ۱ سے بڑا ہوگا تاوقتیکہ

$$(\frac{م-1}{ر}+1)لا > 1 \quad \text{یعنی} \quad \frac{(م-1)لا}{ر} > 1-لا$$

$$\text{یا} \quad \frac{(م-1)لا}{1-لا} > ر$$

اگر $\frac{(م-1)لا}{1-لا}$ ایک مثبت صحیح عدد ہو تو اس کو پ سے تعبیر کرو۔ تب (پ+1)۔ ویں رقم پ۔ ویں رقم کے مساوی ہوگی اور یہ سلسلہ کی کسی دوسری رقم سے زیادہ بڑی ہونگی۔

اگر $\frac{(م-1)لا}{1-لا}$ مثبت ہو مگر صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ق سے تعبیر کرو۔ تب (ق+1)۔ ویں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

اگر $\frac{(م-1)لا}{1-لا}$ منفی ہو تو م اِکائی سے کم ہوگی۔ اور ضرب دینے والے جزوِ ضربی کو $(1-\frac{1-م}{ر})$ لا کی شکل میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

وہ ہمیشہ ا سے چھوٹا ہوگا۔ اس لئے ہر رقم اس سے پیشتر کی رقم سے چھوٹی ہے۔ پس پہلی رقم ہی سب سے بڑی ہے۔

۱۷- ن حروف ا، ب، ج... اور ان کی قوتوں سے ر ابعاد کے جو متجانس حاصل ضرب تیار ہو سکتے ہیں اُن کی تعداد کی تعیین۔

ہمیں معلوم ہے کہ معمولی تقسیم سے یا مسئلہ ثنائی کی مدد سے

$$\frac{1}{1-\text{ا}\,\text{لا}} = 1 + \text{ا}\,\text{لا} + \text{ا}^2\text{لا}^2 + \text{ا}^3\text{لا}^3 + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1-\text{ب}\,\text{لا}} = 1 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ب}^2\text{لا}^2 + \text{ب}^3\text{لا}^3 + \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1-\text{ج}\,\text{لا}} = 1 + \text{ج}\,\text{لا} + \text{ج}^2\text{لا}^2 + \text{ج}^3\text{لا}^3 + \cdots\cdots$$

. . . .

پس باہمدیگر ضرب دینے سے

$$\frac{1}{1-\text{ا}\,\text{لا}} \times \frac{1}{1-\text{ب}\,\text{لا}} \times \frac{1}{1-\text{ج}\,\text{لا}} \times \cdots\cdots$$

$$= (1 + \text{ا}\,\text{لا} + \text{ا}^2\text{لا}^2 + \cdots)(1 + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ب}^2\text{لا}^2 + \cdots)(1 + \text{ج}\,\text{لا} + \text{ج}^2\text{لا}^2 + \cdots)\cdots$$

$$= 1 + \text{لا}(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \cdots) + \text{لا}^2(\text{ا}^2 + \text{اب} + \text{اج} + \text{ب}^2 + \text{بج} + \text{ج}^2 + \cdots) + \cdots$$

$$= 1 + \text{س}_1\text{لا} + \text{س}_2\text{لا}^2 + \text{س}_3\text{لا}^3 + \cdots\cdots$$ فرض کرو

جس میں س_1، س_2، س_3 ...... ایک، دو، تین ...... ابعاد کے متجانس حاصل ضربوں کے حاصل جمع ہیں جو ا، ب، ج ..... اور ان کی قوتوں سے تیار کئے جا سکتے ہیں۔

اِن حاصل ضربوں کی تعداد معلوم کرنے کے لئے ا، ب، ج..... میں سے ہر ایک کو ۱ کے مساوی لکھو۔

س_1، س_2، س_3 ..... کی اس طرح جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ایک، دو، تین... ابعاد کے متجانس حاصل ضربوں کی تعداد دیتی ہیں۔

معہذا

$$\frac{1}{1-\text{ا}\,\text{لا}} \times \frac{1}{1-\text{ب}\,\text{لا}} \times \frac{1}{1-\text{ج}\,\text{لا}} \times \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(1-\text{لا})^{\text{ن}}} = (1-\text{لا})^{-\text{ن}}$$ ہو جاتا ہے۔

پس $\text{س}_{\text{ر}} = (\text{۱} - \text{لا})^{-\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر

$$= \frac{\text{ن}(\text{ن}+\text{۱})(\text{ن}+\text{۲})\cdots(\text{ن}+\text{ر}-\text{۱})}{\underline{|\text{ر}}}$$

$$= \frac{\underline{|\text{ن}+\text{ر}-\text{۱}}}{\underline{|\text{ر}}\ \underline{|\text{ن}-\text{۱}}}$$

۱۸- کسی کثیر رقمی جملہ کے پھیلاؤ میں رقموں کی تعداد کی تعیین جبکہ قوت نما ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے-

$(\text{ا}_{\text{۱}} + \text{ا}_{\text{۲}} + \text{ا}_{\text{۳}} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ر}})^{\text{ن}}$
کے پھیلاؤ میں ہر ایک رقم ن ابعاد کی ہے۔ اس لئے رقموں کی تعداد وہی ہے جو ن ابعاد کے متجانس حاصل ضربوں کی تعداد ہے جو ر مقادیر $\text{ا}_{\text{۱}}$، $\text{ا}_{\text{۲}}$، $\text{ا}_{\text{۳}}$ ..... $\text{ا}_{\text{ر}}$ اور اُن کی قوتوں کی ہے۔ اور اس لئے سابقہ فصل کی رُو سے

$$= \frac{\underline{|\text{ر}+\text{ن}-\text{۱}}}{\underline{|\text{ن}}\ \underline{|\text{ر}-\text{۱}}}$$

مثال — $\frac{(\text{۱}-\text{۲لا})^{\text{۲}}}{(\text{۱}+\text{لا})^{\text{۳}}}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر دریافت کرو۔

جملہ $= (\text{۱} - \text{۴لا} + \text{۴لا}^{\text{۲}})(\text{۱} + \text{پ}_{\text{۱}}\text{لا} + \text{پ}_{\text{۲}}\text{لا}^{\text{۲}} + \cdots + \text{پ}_{\text{ر}}\text{لا}^{\text{ر}} + \cdots)$ بالفرض۔

واضح ہے کہ $\text{پ}_{\text{ر}}$، $\text{پ}_{\text{ر}-\text{۱}}$، $\text{پ}_{\text{ر}-\text{۲}}$ کو علی الترتیب ۱، -۴، ۴ کے ساتھ ضرب دینے اور نتائج کو جمع کرنے سے $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر دریافت ہوگا۔

پس مطلوب سر $= \text{پ}_{\text{ر}} - \text{۴پ}_{\text{ر}-\text{۱}} + \text{۴پ}_{\text{ر}-\text{۲}}$

لیکن $\text{پ}_{\text{ر}} = (-\text{۱})^{\text{ر}} \frac{(\text{ر}+\text{۱})(\text{ر}+\text{۲})}{\text{۲}}$

اِس لئے کہ $(۱+لا)^{-۳}$ کی $(ر+۱)$ - ویں رقم $= \frac{(-۳)(-۴)(-۵)\ldots(-۳-ر+۱)}{\underline{|ر}} لا^ر$

$$= (-۱)^ر \frac{۳\times۴\times۵\times\ldots(ر+۲)}{\underline{|ر}} لا^ر$$

$$= (-۱)^ر \frac{(ر+۱)(ر+۲)}{۱\times۲}$$

پس مطلوب سر

$$= (-۱)^ر \frac{(ر+۱)(ر+۲)}{۲} - ۳(-۱)^{ر-۱}\frac{ر(ر+۱)}{۲} + ۴(-۱)^{ر-۲}\frac{ر(ر-۱)}{۲}$$

$$= \frac{(-۱)^ر}{۲}\left\{(ر+۱)(ر+۲) + ۳ر(ر+۱) + ۴ر(ر-۱)\right\}$$

$$= \frac{(-۱)^ر}{۲}(۹ر^۲ + ۳ر + ۲)$$

سوالات (۱) د

(۱) $\frac{(۲+لا+لا^۲)}{(۱+لا)^۳}$ کے پھیلاؤ میں $لا^ن$ کا سر دریافت کرو۔

(۲) ثابت کرو کہ $(۱-لا^۳)^ن$ کا پھیلاؤ ذیل کے سلسلہ کی شکل میں ڈھالا جا سکتا ہے :-

$$(۱-لا)^{۳ن} + ۳ن\,لا(۱-لا)^{۳ن-۲} + \frac{۳ن(۳ن-۳)}{۱\times۲}لا^۲(۱-لا)^{۳ن-۴} + \ldots\ldots$$

(۳) ثابت کرو کہ اگر ن ایک جفت صحیح عدد ہے تو

$$\frac{۱}{\underline{|۱}\,\underline{|ن-۱}} + \frac{۱}{\underline{|۳}\,\underline{|ن-۳}} + \frac{۱}{\underline{|۵}\,\underline{|ن-۵}} + \ldots + \frac{۱}{\underline{|ن-۱}\,\underline{|۱}} = \frac{۲^{ن-۱}}{\underline{|ن}}$$

۱۹- اِس باب کو ختم کرنے سے پہلے ہم کثیر رقمی جملہ کے پھیلاؤ میں

کسی معیّن رقم کا سر معلوم کرنے کا طریقہ بیان کرینگے۔

$(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \ldots)^{\text{پ}}$ کے پھیلاؤ میں کسی معیّن رقم $\text{ا}^{\text{ع}}\,\text{ب}^{\text{ب}}\,\text{ج}^{\text{ج}}\,\text{د}^{\text{ض}}$ کا سر معلوم کرنا جبکہ پ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

یہ پھیلاؤ پ اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے ہر جزوِ ضربی $(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \ldots)$ ہے اور اس پھیلاؤ کی ہر ایک رقم ان پ اجزائے ضربی میں سے ایک ایک حرف لے کر ضرب دینے سے بنتی ہے پس کوئی رقم $\text{ا}^{\text{ع}}\,\text{ب}^{\text{ب}}\,\text{ج}^{\text{ج}}\,\text{د}^{\text{ض}} \ldots$ جتنے طریقوں سے آخری حاصل ضرب میں صورت پذیر ہوگی ان کی تعداد، پ حروف کو ترتیب دینے کے طریقوں کی تعداد کے مساوی ہے جبکہ ان میں سے ع حروف ا ہونے چاہئیں، ب حروف ب، ج حروف ج اور اس طرح بقیہ دیگر حروف یعنی

$$\text{ا}^{\text{ع}}\,\text{ب}^{\text{ب}}\,\text{ج}^{\text{ج}}\,\text{د}^{\text{ض}} \ldots \text{ کا سر } \frac{\lfloor \text{پ}}{\lfloor \text{ع} \; \lfloor \text{ب} \; \lfloor \text{ج} \; \lfloor \text{ض} \ldots} \text{ ہے}$$

جس میں $\text{ع} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ض} + \ldots = \text{پ}$

نتیجۂ صریح — $(\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{لا}^{2} + \text{د}\,\text{لا}^{3} + \ldots)^{\text{پ}}$ کے پھیلاؤ میں $\text{ا}^{\text{ع}}\,\text{ب}^{\text{ب}}\,\text{ج}^{\text{ج}}\,\text{د}^{\text{ض}} \ldots$ کو اپنے میں شامل رکھنے والی رقم

$$\frac{\lfloor \text{پ}}{\lfloor \text{ع} \; \lfloor \text{ب} \; \lfloor \text{ج} \; \lfloor \text{ض} \ldots} \; \text{ا}^{\text{ع}}\,\text{ب}^{\text{ب}}\,\text{ج}^{\text{ج}}\,\text{د}^{\text{ض}} \ldots \text{لا}^{\text{ب} + 2\text{ج} + 3\text{ض} + \ldots}$$

ہے، جس میں $\text{ع} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ض} + \ldots = \text{پ}$

اِس رقم کو ہم پھیلاؤ کی عام رقم کہہ سکتے ہیں۔

مثال — $(\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{لا}^{2})^{11}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ے}}$ کا سر دریافت کرو۔

اِس پھیلاؤ کی عام رقم $\frac{\lfloor 11}{\lfloor \text{ع} \; \lfloor \text{ب} \; \lfloor \text{ج}} \; \text{ا}^{\text{ع}}\,\text{ب}^{\text{ب}}\,\text{ج}^{\text{ج}}\,\text{لا}^{\text{ب} + 2\text{ج}}$ ہے۔

جس میں ع + ب + ج = ۱۱

اب ہمیں چاہیئے کہ آزمائش سے ب اور ج کی وہ تمام مثبت صحیح قیمتیں معلوم کریں جو مساوات ب + ۲ ج = ۷ کے لئے صادق آتی ہیں۔ اس کے بعد ع کی قیمتیں ذیل کی مساوات سے معلوم کر لی جاسکتی ہیں:۔

ع + ب + ج = ۱۱

ج = ۳ لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے ب = ۱، اور اس لئے ع = ۷

ج = ۲ " " ب = ۳، " ع = ۶

ج = ۱ " " ب = ۵ " ع = ۵

ج = ۰ " " ب = ۷ " ع = ۴

مطلوبہ سر، پھیلاؤ کی عام رقم کے لئے اوپر جو جملہ لکھا گیا ہے اس کی نظیری قیمتوں کا حاصل جمع ہوگا۔

پس مطلوبہ سر =

$$\frac{11!}{7!\,1!\,3!}\,\text{ا}^{7}\,\text{ب}\,\text{ج}^{3}+\frac{11!}{6!\,3!\,2!}\,\text{ا}^{6}\,\text{ب}^{3}\,\text{ج}^{2}+\frac{11!}{5!\,5!\,1!}\,\text{ا}^{5}\,\text{ب}^{5}\,\text{ج}+\frac{11!}{4!\,7!\,0!}\,\text{ا}^{4}\,\text{ب}^{7}$$

$$=1320\,\text{ا}^{7}\,\text{ب}\,\text{ج}^{3}+4620\,\text{ا}^{6}\,\text{ب}^{3}\,\text{ج}^{2}+2772\,\text{ا}^{5}\,\text{ب}^{5}\,\text{ج}+330\,\text{ا}^{4}\,\text{ب}^{7}$$

۲۰۔ پھیلاؤ $(\text{ا}+\text{ب لا}+\text{ج لا}^{2}+\text{د لا}^{3}+\dots)^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں عام رقم کی تعیین جبکہ ن کوئی ایک منطق مقدار ہو۔

مسئلہ ثنائی سے، عام رقم

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\dots(\text{ن}-\text{پ}+1)}{\text{پ}!}\,\text{ا}^{\text{ن}-\text{پ}}\,(\text{ب لا}+\text{ج لا}^{2}+\text{د لا}^{3}+\dots)^{\text{پ}}$$

ہے، جس میں پ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

فصل (۱۶) سے، $(\text{ب لا}+\text{ج لا}^{2}+\text{د لا}^{3}+\dots)^{\text{پ}}$ کے پھیلاؤ کی

عام رقم

$$\frac{|\text{پ}}{|\text{بہ}\;|\text{جہ}\;|\text{ضہ}\;\cdots}\;\text{ب}^{\text{بہ}}\,\text{ج}^{\text{جہ}}\,\text{د}^{\text{ضہ}}\cdots\text{لا}^{\text{بہ}+۲\text{جہ}+۳\text{ضہ}+\cdots}$$ ہے۔

جس میں بہ، جہ، ضہ، ..... مثبت صحیح اعداد ہیں جن کا حاصل جمع پ ہے۔
پس، دئے ہوئے جملہ کے پھیلاؤ کی عام رقم

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\cdots(\text{ن}-\text{پ}+۱)}{|\text{بہ}\;|\text{جہ}\;|\text{ضہ}\;\cdots}\;\text{ا}^{\text{ن}-\text{پ}}\,\text{ب}^{\text{بہ}}\,\text{ج}^{\text{جہ}}\,\text{د}^{\text{ضہ}}\cdots\text{لا}^{\text{بہ}+۲\text{جہ}+۳\text{ضہ}+\cdots}$$ ہے

جس میں $\text{بہ}+\text{جہ}+\text{ضہ}+\cdots=\text{پ}$

۲۱۔ چونکہ $(\text{ا}+\text{ب لا}+\text{ج لا}^{۲}+\text{ضہ لا}^{۳}+\cdots)^{\text{ن}}$ کو ہم ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{ا}^{\text{ن}}\left(۱+\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\text{لا}+\frac{\text{ج}}{\text{ا}}\text{لا}^{۲}+\frac{\text{د}}{\text{ا}}\text{لا}^{۳}+\cdots\right)^{\text{ن}}$$

اس لئے کافی ہوگا اگر ہم صرف ایسی صورت پر غور کریں جس میں کثیر رقمی جملہ کی پہلی رقم اکائی ہے۔

چنانچہ $(۱+\text{ب لا}+\text{ج لا}^{۲}+\text{د لا}^{۳}+\cdots)^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ کی عام رقم،

$$\frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\cdots(\text{ن}-\text{پ}+۱)}{|\text{بہ}\;|\text{جہ}\;|\text{ضہ}\;\cdots}\;\text{ب}^{\text{بہ}}\,\text{ج}^{\text{جہ}}\,\text{د}^{\text{ضہ}}\cdots\text{لا}^{\text{بہ}+۲\text{جہ}+۳\text{ضہ}+\cdots}$$ ہے

جس میں $\text{بہ}+\text{جہ}+\text{ضہ}+\cdots=\text{پ}$

مثال — $(۱-۳\text{لا}-۲\text{لا}^{۲}+۶\text{لا}^{۳})^{\frac{۲}{۳}}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{۳}$ کا سر دریافت کرو۔

اس کی عام رقم

$$\frac{\frac{۲}{۳}(\frac{۲}{۳}-۱)(\frac{۲}{۳}-۲)\cdots(\frac{۲}{۳}-\text{پ}+۱)}{|\text{بہ}\;|\text{جہ}\;|\text{ضہ}}\,(-۳)^{\text{بہ}}(-۲)^{\text{جہ}}(۶)^{\text{ضہ}}\,\text{لا}^{\text{بہ}+۲\text{جہ}+۳\text{ضہ}}$$ ہے

ہمیں چاہیئے کہ آزمائش کے ذریعہ بہ، جہ، ضہ کی وہ تمام مثبت صحیح قیمتیں معلوم کریں جو مساوات بہ + ۲ جہ + ۳ ضہ = ۳ کے لئے صادق آتی ہیں۔ تب مساوات پ = بہ + جہ + ضہ سے پ کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے۔ مطلوبہ سر مندرجۂ بالا جملہ کی نظیری قیمتوں کا حاصل جمع ہوگا۔

بہ، جہ، ضہ کی تعیین میں انسب ہوگا کہ ضہ کو یکے بعد دیگرے جو مثبت صحیح قیمتیں دی جائینگی اِن میں سب سے پہلی قیمت اعظم ممکنہ ہو۔ موجودہ مثال میں یہ قیمتیں اس طرح معین ہونگی:—

ضہ = ۱، جہ = ۰، بہ = ۰، پ = ۱

ضہ = ۰ جہ = ۱ بہ = ۱ پ = ۲

ضہ = ۰ جہ = ۰ بہ = ۳ پ = ۳

ان قیمتوں کو عام رقم کے جملہ میں تعویض کرنے سے مطلوبہ سر

= (۲/۳)(۶) + (۲/۳)(-۱/۳)(-۳)(-۲) + [۲/۳ (-۱/۳)(-۴/۳) / ۳!] (-۳)^{۳}

= ۴ - ۴/۳ - ۴/۳ = ۴/۳

نوٹ۔ طالب علم کو یہ یاد رکھنا چاہیئے کہ بعض اوقات مسئلہ ثنائی کا راست استعمال زیادہ آسان اور زود اثر ثابت ہوتا ہے۔ جیسا کہ ذیل کی مثال سے ظاہر ہوگا۔

مثال — (۱ - ۲ لا + ۳ لا^{۲})$^{-۳}$ کے پھیلاؤ میں لا^{۴} کا سر دریافت کرو۔

(۱ - ۲ لا + ۳ لا^{۲})$^{-۳}$ = {۱ - (۲ لا - ۳ لا^{۲})}$^{-۳}$

مسئلہ ثنائی کے ذریعہ اس کو پھیلائیں تو اس کی پہلی چند رقمیں حسبِ ذیل ہونگی:—

۱ + ۳ (۲ لا - ۳ لا^{۲}) + ۶ (۲ لا - ۳ لا^{۲})^{۲} + ۱۰ (۲ لا - ۳ لا^{۲})^{۳} + ۱۵ (۲ لا - ۳ لا^{۲})^{۴}

اس سے آگے بڑھنے کی ہمیں اس لئے ضرورت نہیں کہ بعد کو آنے والی تمام رقموں میں لا کی قوّت لا^{۸} سے زائد ہوگی۔

پس مطلوبہ سر = ۶ × ۹ + ۱۰ × ۳ (۲)^{۲} (− ۳) + ۱۵ (۲)^{۴} = − ۶۶

سوالات ۱ (ھ)

(۱) (ا + ب − ج − د)^{۸} کے پھیلاؤ میں ا^{۲} ب^{۵} د کا سر معلوم کرو۔

(۲) (۱ − ۲ لا + ۳ لا^{۲} − ۴ لا^{۳})^{۴} کے پھیلاؤ میں لا^{۸} کا سر معلوم کرو۔

(۳) (۱ − $\frac{\text{لا}^{۲}}{۳}$ + $\frac{\text{لا}^{۴}}{۹}$)$^{-۲}$ کے پھیلاؤ میں لا^{۸} کا سر دریافت کرو۔

(۴) (۱ + ۳ لا^{۲} − ۶ لا^{۳})$^{-\frac{۲}{۳}}$ کو لا^{۵} تک پھیلاؤ۔

(۵) اگر (۱ + لا + لا^{۲})^{ن} کا پھیلاؤ

ا$_{۰}$ + ا$_{۱}$ لا + ا$_{۲}$ لا^{۲} + ... ا$_{ر}$ لا^{ر} + ... + ا$_{۲ن}$ لا^{۲ن} ہو

تو ثابت کرو کہ

ا$_{۰}$ + ا$_{۳}$ + ا$_{۶}$ + ... = ا$_{۱}$ + ا$_{۴}$ + ا$_{۷}$ + ... = ا$_{۲}$ + ا$_{۵}$ + ا$_{۸}$ + ...

= ۳$^{ن-۱}$

دوسرا باب

جزوی کسور

۲۲- متعدد کسور کا حاصل جمع آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔ اس کا معکوس عمل یعنی ایسی کسروں کا دریافت کرنا جن کے نسب نما کسی دی ہوئی کسر کے نسب نما سے چھوٹے ابعاد کے ہوں اور جن کا جبری مجموعہ اس دی ہوئی کسر کے مساوی ہو' اعلیٰ ریاضی میں اکثر استعمال ہوتا ہے۔ ان کسروں کو دی ہوئی کسر کی جزوی کسریں کہتے ہیں۔

جس کسر کی جزوی کسریں مطلوب ہیں اس کے شمار کنندہ کو کسی معین حرف کے لحاظ سے نسب نما سے چھوٹے ابعاد کا تصور کر سکتے ہیں۔ اگر ابتداءً فی الواقع ایسا نہ بھی ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کر کے اس کو بالآخر اس حالت میں لا سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں دی ہوئی کسر ایک صحیح جملہ اور ایسی کسر کے مجموعہ کے مساوی لکھی جائیگی جس میں شمار کنندہ کے ابعاد نسب نما کے ابعاد سے کمتر ہونگے۔

۲۳- کوئی کسر جس کا نسب نما درجۂ اول کے متعدد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں ڈھالا جا سکتا ہے' جزوی کسور کے ایک سلسلہ میں تحویل ہو سکتی ہے جس کے نسب نما درجۂ اول کے متذکرہ صدر اجزائے ضربی ہونگے۔

فرض کرو کہ دی ہوئی کسر کا نسب نما ن اجزائے ضربی (لا - ا)' (لا - ب)' (لا - ج)' ..... کا حاصل ضرب ہے۔ اور فرض کرو کہ شمار کنندہ ف(لا) سے تعبیر کیا جاتا ہے' جس میں ف(لا) ایسا کوئی ایک جملہ ہے جس کے ابعاد بلحاظ لا (ن - ۱) سے بالاتر نہیں ہیں۔

پس

$$\frac{\text{ف(لا)}}{\text{(لا-ا)(لا-ب)(لا-ج)....}} \equiv \frac{\text{ا}}{\text{لا-ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا-ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{لا-ج}} + \ldots$$

اب ہمیں ا' ب' ج' وغیرہ (جو لا کے غیر تابع ہیں) کی قیمتیں دریافت کرنا ہے۔

(لا - ا) (لا - ب) (لا - ج) .... سے ضرب دینے سے

ف (لا) = ا (لا - ب) (لا - ج) ..... + ب (لا - ا) (لا - ج) .....

+ ج (لا - ا) (لا - ب) .... (۱)

رابطہ (۱) ایک تماثل ہونے کے لئے یہ ضروری اور کافی ہے کہ مساوات کے دونوں جانب لا کی مشابہ قوتوں کی رقموں کے سر مساوی ہوں۔ ہمیں معلوم ہے کہ ف (لا) زیادہ سے زیادہ (ن-۱) درجہ کا ہوگا۔ اور (۱) کے سیدھے جانب کی تمام رقمیں (ن-۱) درجہ کی ہیں۔ پس (۱) کے دونوں جانب کے لا^۰، لا^۱ ..... لا^{ن-۱} کے سروں کو ایک دوسرے کے مساوی لکھنے سے ہمیں ن مساواتیں مل جاتی ہیں جو ن مقداروں ا، ب، ج .... کی تعیین کے لئے کافی ہیں۔

ہم ا، ب، ج وغیرہ کی قیمتیں علیحدہ علیحدہ بھی مندرجہ ذیل طریقہ سے دریافت کر سکتے ہیں۔ چونکہ رابطہ (۱) لا کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہونا چاہیئے اس لئے وہ لا = ا کے لئے بھی صحیح ہوگا۔ پس لا کو ا کے مساوی لکھنے سے ف (ا) = ا (ا - ب) (ا - ج) ..... اور اس لئے

ا = ف (ا) / (ا - ب) (ا - ج) اسی طرح ب = ف (ب) / (ب - ا) (ب - ج) اور ایسا ہی ج، د ..... کی قیمتیں تعین ہو سکتی ہیں۔

ہم نے یوں ا، ب، ج ..... کی قیمتیں دریافت کر لیں جو رابطہ (۱) کو لا کی ن قیمتوں ا، ب، ج، ..... کے لئے صحیح بناتی ہیں۔ اور چونکہ رابطہ (۱) کے دونوں جانب کے جملے (ن - ۱) سے بڑے درجہ کے نہیں ہیں اس لئے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ رابطہ (۱)، لا کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہے۔

پس ف (لا) / (لا - ا) (لا - ب) (لا - ج) .... = Σ ف (ا) / (ا - ب) (ا - ج) .... · ۱ / (لا - ا)

مندرجۂ بالا بیان میں یہ فرض کیا گیا تھا کہ نسب نما کے تمام اجزائے ضربی معلوم اور ایک دوسرے سے مختلف تھے۔ عام مسئلہ حسب ذیل ہے :-

اگر $\frac{ن}{پ ق}$ کوئی کسر ہے جس میں ن، پ، ق، لا کے منطق صحیح تفاعل ہیں اور ن کے ابعاد پ ق سے کم درجہ کے ہیں۔ تو بشرطیکہ پ اور ق بلحاظ لا کے، ایک دوسرے کے لئے مفرد ہوں، دو اَور تفاعل ا اور ب لا کے لحاظ سے منطق اور صحیح ایسے دریافت کئے جا سکتے ہیں کہ

$$\frac{ن}{پ ق} \equiv \frac{ا}{پ} + \frac{ب}{ق}$$

چونکہ پ اور ق بلحاظ یکدیگر مفرد ہیں ہمیشہ لا کے ایسے دو صحیح تفاعل فرض کرو (ج اور د) دریافت ہو سکتے ہیں جن کے لئے

$$ج ق + د پ = ا$$

اور اِس لئے $\frac{ج ن}{پ} + \frac{د ن}{ق} \equiv \frac{ن}{پ ق}$ .... (عہ)

اب فرض کرو $\frac{ج ن}{پ} = ل + \frac{ا}{پ}$ جس میں ل، لا کی رقموں میں ایک صحیح جملہ ہے اور ا میں لا کے ابعاد پ سے کمتر ہیں اور اس طرح فرض کرو $\frac{د ن}{ق} = م + \frac{ب}{ق}$۔ چونکہ ن کے ابعاد پ ق سے کمتر ہیں اس لئے تماثل (عہ) سے یہ نتیجہ مترتب ہوتا ہے کہ ل + م = ۰ اور

$$\frac{ن}{پ ق} = \frac{ا}{پ} + \frac{ب}{ق} \quad \text{.......... (بہ)}$$

مساوات (بہ) سے یہ فوراً واضح ہوتا ہے کہ اگر عہ، بہ، جہ، .... تمام بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں تو ہم ہمیشہ ا، ب، ج، .... بلحاظ لا، عہ، بہ، جہ، .... سے کمتر ابعاد کے ایسے تفاعل دریافت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{ن}{عہ، بہ، جہ...} \equiv \frac{ا}{عہ} + \frac{ب}{بہ} + \frac{ج}{جہ} + ...$$

مثال (۱) — کسر $\frac{لا + ۲}{(لا + ۱)^۲ (لا^۲ + ۳ لا + ۴)}$ پر غور کرو۔

نسب نما کے اجزائے ترکیبی $(لا^{۲} + ۲لا + ۱)$ اور $(لا^{۲} + ۳لا + ۴)$ لکھے جا سکتے ہیں۔

اور $لا^{۲} + ۲لا + ۱)\ لا^{۲} + ۳لا + ۴\ (۱$

$لا^{۲} + ۲لا + ۱$

$لا + ۳)\ لا^{۲} + ۲لا + ۱\ (لا - ۱$

$لا^{۲} + ۲لا - ۳$

۴

پس $لا + ۳ = لا^{۲} + ۳لا + ۴ - (لا^{۲} + ۲لا + ۱)$

$$۴ = لا^{۲} + ۲لا + ۱ - (لا + ۳)(لا - ۱)$$

$$= لا^{۲} + ۲لا + ۱ - \{لا^{۲} + ۳لا + ۴ - (لا^{۲} + ۲لا + ۱)\}(لا - ۱)$$

$$= (لا^{۲} + ۲لا + ۱)\,لا - (لا^{۲} + ۳لا + ۴)(لا - ۱)$$

اس لیے $۴(لا + ۲) = (لا^{۲} + ۲لا + ۱)\,لا\,(لا + ۲) - (لا^{۲} + ۳لا + ۴)(لا - ۱)(لا + ۲)$

$$\therefore \frac{لا + ۲}{(لا + ۱)^{۲}(لا^{۲} + ۳لا + ۴)} = \frac{لا\,(لا + ۲)}{۴(لا^{۲} + ۳لا + ۴)} - \frac{(لا - ۱)(لا + ۲)}{۴(لا^{۲} + ۲لا + ۱)}$$

$$= \frac{۱}{۴}\left\{۱ - \frac{لا + ۴}{لا^{۲} + ۳لا + ۴}\right\} - \frac{۱}{۴}\left\{۱ - \frac{لا + ۳}{لا^{۲} + ۲لا + ۱}\right\}$$

$$= \frac{لا + ۳}{۴(لا^{۲} + ۲لا + ۱)} - \frac{لا + ۴}{۴(لا^{۲} + ۳لا + ۴)}$$

مثال (۲) — $\dfrac{لا^{۲}}{(لا + ۲)^{۳}(لا + ۳)^{۲}}$

یہاں نسب نما کے اجزائے ترکیبی $(لا^{۳} + ۶لا^{۲} + ۱۲لا + ۸)$ اور $(لا^{۲} + ۶لا + ۹)$ پر غور کرو۔

$لا^{۲} + ۶لا + ۹)\ لا^{۳} + ۶لا^{۲} + ۱۲لا + ۸\ (لا$

$لا^{۳} + ۶لا^{۲} + ۹لا$

$۳لا + ۸)\ ۹لا^{۲} + ۵۴لا + ۸۱\ (۳لا + ۱۰$

$۹لا^{۲} + ۵۴لا + ۸۰$

۱

پس $$٣\text{لا} + ٨ = (\text{لا} + ٢)^{٣} - \text{لا}\,(\text{لا} + ٣)^{٢}$$

اور $$١ = ٩(\text{لا} + ٣)^{٢} - (٣\text{لا} + ٨)(٣\text{لا} + ١٠)$$

$$= ٩(\text{لا} + ٣)^{٢} - \left\{(\text{لا} + ٢)^{٣} - \text{لا}\,(\text{لا} + ٣)^{٢}\right\}(٣\text{لا} + ١٠)$$

$$= (٣\text{لا}^{٢} + ١٠\text{لا} + ٩)(\text{لا} + ٣)^{٢} - (٣\text{لا} + ١٠)(\text{لا} + ٢)^{٣}$$

لہذا $$\frac{\text{لا}^{٢}}{(\text{لا} + ٢)^{٣}(\text{لا} + ٣)^{٢}} = \frac{\text{لا}^{٢}(٣\text{لا}^{٢} + ١٠\text{لا} + ٩)}{(\text{لا} + ٢)^{٣}} - \frac{\text{لا}^{٢}(٣\text{لا} + ١٠)}{(\text{لا} + ٣)^{٢}}$$

$$= ٣\text{لا} - ٨ + \frac{٢١\text{لا}^{٢} + ٧٢\text{لا} + ٦۴}{(\text{لا} + ٢)^{٣}} - ٣\text{لا} + ٨ - \frac{٢١\text{لا} + ٧٢}{(\text{لا} + ٣)^{٢}}$$

$$= \frac{٢١\text{لا}^{٢} + ٧٢\text{لا} + ٦۴}{(\text{لا} + ٢)^{٣}} - \frac{٢١\text{لا} + ٧٢}{(\text{لا} + ٣)^{٢}}$$

مصرحۂ بالا مثالوں سے معلوم ہوگیا کہ بالعموم $\frac{\text{ن}}{\text{ع ب ج}\ldots\ldots} = \frac{\text{ا}}{\text{ع}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}} + \ldots$

اس طریقۂ عمل سے ہم چند مثالوں کو حل کرکے بتائینگے :-

(۱) کسر $\frac{\text{لا}^{٢} + ١١\text{لا} + ١۴}{(\text{لا} + ٣)(\text{لا}^{٢} - ۴)}$ کو جزئی کسروں میں علحدہ کرو۔

چونکہ شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ سے کمتر ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$\frac{\text{لا}^{٢} + ١١\text{لا} + ١۴}{(\text{لا} + ٣)(\text{لا}^{٢} - ۴)} = \frac{\text{ا}}{\text{لا} - ٢} + \frac{\text{ب}}{\text{لا} + ٢} + \frac{\text{ج}}{\text{لا} + ٣}$$

جس میں ا، ب اور ج مستقل ہیں۔

مساوات کے دونوں جانب $(\text{لا} + ٣)(\text{لا}^{٢} - ۴)$ سے ضرب دینے سے

$$\text{لا}^{٢} + ١١\text{لا} + ١۴ = \text{ا}(\text{لا} + ٢)(\text{لا} + ٣) + \text{ب}(\text{لا} - ٢)(\text{لا} + ٣) + \text{ج}(\text{لا} - ٢)(\text{لا} + ٢)$$

یعنی $$\text{لا}^{٢} + ١١\text{لا} + ١۴ = (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})\text{لا}^{٢} + (۵\text{ا} + \text{ب})\text{لا} + ٦\text{ا} - ٦\text{ب} - ۴\text{ج}$$

چونکہ آخری مساوات لا کی تمام قیمتوں کے لیئے صادق آنی چاہیے۔

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ١،\quad ۵\text{ا} + \text{ب} = ١١،\quad ٦\text{ا} - ٦\text{ب} - ۴\text{ج} = ١۴$$

جس سے $\text{ا} = ٢$، $\text{ب} = ١$ اور $\text{ج} = -٢$

پس $$\frac{لا^{۲}+۱۱لا+۱۴}{(لا+۳)(لا^{۲}-۴)}=\frac{۲}{لا-۲}+\frac{۱}{لا+۲}-\frac{۲}{لا+۳}$$

اگر نسب نما کے اجزائے ضربی سب کے سب خطی اور ایک دوسرے سے مختلف ہوں جیسا کہ مثالِ بالا میں ہم دیکھتے ہیں تو ذیل کا خاص طریقہ زیادہ سہل ہوگا۔

مساوات $لا^{۲}+۱۱لا+۱۴=ا(لا+۳)(لا+۲)+ب(لا-۲)(لا+۳)+ج(لا-۲)(لا+۲)$ میں لا کو باری باری سے ایسی قیمت دی جائے کہ اصل کسر کے نسب نما کے اجزائے ضربی میں سے ایک ایک جزو صفر ہو جائے یعنی $لا=۲$، $لا=-۲$ اور $لا=-۳$

جب، $لا=۲$ تو مساوات ہو جاتی ہے $۴۰=۲۰ا$ جس سے $ا=۲$،
جب $لا=-۲$ تو مساوات ہو جاتی ہے $-۴=-۴ب$ جس سے $ب=۱$
اور جب $لا=-۳$ تو مساوات ہوتی ہے $-۱۰=۵ج$، جس سے $ج=-۲$

مثال — $\frac{لا^{۲}+۱۵}{(لا-۱)(لا^{۲}+۲لا+۵)}$ کو جزئی کسروں میں تحلیل کرو۔

فرض کرو $$\frac{لا^{۲}+۱۵}{(لا-۱)(لا^{۲}+۲لا+۵)}=\frac{ا}{لا-۱}+\frac{ب لا+ج}{لا^{۲}+۲لا+۵}$$

[یہاں یہ بات یاد رکھنی چاہیئے کہ بائیں جانب کے جملہ کی دوسری رقم کا نسب نما بلحاظ لا دوم درجہ کا ہے اور شمار کنندہ پہلے درجہ کا۔]

پس $لا^{۲}+۱۵=ا(لا^{۲}+۲لا+۵)+(ب لا+ج)(لا-۱)$

$لا=۱$ لکھنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے $۱۶=۸ا$ پس $ا=۲$

مساوات بالا میں $ا=۲$ لکھ کر جملوں کو ترتیب دینے سے

$$-لا^{۲}-۴لا+۵=(ب لا+ج)(لا-۱)$$

یا $(لا-۱)$ پر تقسیم کرنے سے، $ب لا+ج=-لا-۵$

لہذا $$\frac{لا^{۲}+۱۵}{(لا-۱)(لا^{۲}+۲لا+۵)}=\frac{۲}{لا-۱}-\frac{لا+۵}{لا^{۲}+۲لا+۵}$$

[اگر $\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا} + ۵$ کے اجزائے ترکیبی دریافت کئے جائیں تو ملتف جملے $\text{لا} + ۱ + ۲\text{خ}$ اور $\text{لا} + ۱ - ۲\text{خ}$ حاصل ہونگے جہاں $\text{خ} = \sqrt{-۱}$ اور زیر بحث کسر کے حسب ذیل اجزائے ضربی برآمد ہونگے :-

$$\frac{۲}{\text{لا}-۱} - \frac{۳+\text{خ}}{-۲-۲\text{خ}} \times \frac{۱}{\text{لا}+۱+۲\text{خ}} - \frac{۳-\text{خ}}{۲+۲\text{خ}} \times \frac{۱}{\text{لا}+۱-۲\text{خ}}$$

اس کا عمل طالب علم کی مشق کے لیے چھوڑ دیا جاتا ہے ۔]

۴۳ - اگر کسر کے نسب نما کے بعض اجزائے ترکیبی ایک یا اس سے زیادہ مرتبہ دُہرائے جائیں

یعنی کسر $\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ق}(\text{لا})}$ ہو اور بطور مثال اگر

نسب نما $\text{ق}(\text{لا}) = (\text{ا}_{۱}\text{لا} + \text{ب}_{۱})^{۲}(\text{ا}_{۲}\text{لا} + \text{ب}_{۲})(\text{ا}_{۳}\text{لا}^{۲} + \text{ب}_{۳}\text{لا} + \text{ج}_{۳})^{۲}$ ہو تو ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ق}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}_{۱}}{(\text{ا}_{۱}\text{لا} + \text{ب}_{۱})^{۲}} + \frac{\text{اَ}_{۱}}{\text{ا}_{۱}\text{لا} + \text{ب}_{۱}} + \frac{\text{ا}_{۲}}{\text{ا}_{۲}\text{لا} + \text{ب}_{۲}} + \frac{\text{ا}_{۳}\text{لا} + \text{ب}_{۳}}{(\text{ا}_{۳}\text{لا}^{۲} + \text{ب}_{۳}\text{لا} + \text{ج}_{۳})^{۲}} + \frac{\text{اَ}_{۳}\text{لا} + \text{بَ}_{۳}}{\text{ا}_{۳}\text{لا}^{۲} + \text{ب}_{۳}\text{لا} + \text{ج}_{۳}} \quad ....(۱)$$

واضح ہو کہ دی ہوئی کسر کے شمار کنندہ کا درجہ اس کے نسب نما کے درجہ سے کمتر ہے اور شمار کنندہ اور نسب نما کے مابین کوئی مشترک جزوِ ترکیبی نہیں ہے ۔ جزئی کسور کے لئے جو رقمیں فرض کی گئی ہیں ان پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ یک درجی کثیر رقمی جملہ $\text{ا}_{۱}\text{لا} + \text{ب}_{۱}$ ایسے کسور کے نسب نماؤں میں جن کے شمار کنندے ایک ہی شکل کے یعنی ایک مستقل ہوتے ہیں، پہلے اور نیز دُوسرے درجہ میں موجود ہے ۔ اسی طرح دو درجی کثیر رقمی جملہ $\text{ا}_{۳}\text{لا}^{۲} + \text{ب}_{۳}\text{لا} + \text{ج}_{۳}$ ایسے کسور کے نسب نماؤں میں جن کے شمار کنندے ایک ہی شکل کے یعنی یک درجی کثیر رقمی جملے ہیں، پہلے اور نیز دوسرے درجہ میں موجود ہے ۔

[اگر طالب علم ایسے نسب نماؤں والی کسروں کو آزمائش کے لیے لکھ کر

معمولی قواعد سے ان کا جبری حاصل جمع نکالے تو معلوم ہوگا کہ اس کی شکل ہو بہو $\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})}$ کی سی ہوگی]۔

اگر ہم مساوات (۱) کو ف (لا) سے ضرب دیں تو ہمیں بلحاظ لا چھٹے درجہ کی ایک مساوات ملیگی، چونکہ ہمارا مفروضہ ہے کہ ف (لا) کا درجہ ف (لا) کے درجہ سے چھوٹا ہے۔ پس مساوات کے دونوں جانب لا^6، لا^5، لا^4، لا^3، لا^2 اور لا کے سروں اور مستقل رقموں کو ایک دوسرے کے مساوی لکھنے سے ہمارے لیے سات غیر معلوم مستقلوں ا، ا_1، ب، ب_1، ب_2، ب_3، ب_4 کی تعیین کے لئے سات مساواتیں مہیا ہو جاتی ہیں۔

پس واضح ہے کہ اگر یہ فرض کرلیا جائے کہ ایسے مستقل موجود ہیں تو ان کی تعیین کا مصرحۂ بالا طریقہ بالکل عام ہے۔ بطور مثال چند سوال حل کیے جاتے ہیں۔

(۱) $\frac{3\,\text{لا}^7 + \text{لا}^6 - 6\,\text{لا}^4 - 8\,\text{لا}^3 - 11\,\text{لا} + 9}{2(\text{لا}^3 - 1)^2}$ کو جزئی کسروں میں تحلیل کرو۔

معمولی تقسیم کے عمل سے دی ہوئی کسر $= \frac{3}{2}\,\text{لا} + \frac{1}{2} + \frac{\text{لا}^3 - 4\,\text{لا}^2 - 7\,\text{لا} + 4}{(\text{لا}^3 - 1)^2}$

اب فرض کرو کہ $\frac{\text{لا}^3 - 4\,\text{لا}^2 - 7\,\text{لا} + 4}{(\text{لا}^3 - 1)^2} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا} - 1)^2} + \frac{\text{ب}}{\text{لا} - 1}$

$+ \frac{\text{ج}\,\text{لا} + \text{د}}{(\text{لا}^2 + \text{لا} + 1)^2} + \frac{\text{ع}\,\text{لا} + \text{ف}}{\text{لا}^2 + \text{لا} + 1}$

اور کسور سے صاف کرو۔ نتیجہ ہے

$\text{لا}^3 - 4\,\text{لا}^2 - 7\,\text{لا} + 4 = (\text{ب} + \text{ع})\,\text{لا}^5 + (\text{ا} + \text{ب} - \text{ع} + \text{ف})\,\text{لا}^4$

$+ (2\,\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{ف})\,\text{لا}^3 + (3\,\text{ا} - \text{ب} - 2\,\text{ج} + \text{د} - \text{ع})\,\text{لا}^2$

$+ (2\,\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} - 2\,\text{د} + \text{ع} - \text{ف})\,\text{لا} + (\text{ا} - \text{ب} + \text{د} + \text{ف})$

لا کی مساوی قوتوں کے سروں کو باہمدیگر مساوی لکھنے سے ہمیں ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:-

ع + ف = ۰
ا + ب − ع + ف = ۰
۲ا + ب + ج − ف = ۱
۳ا − ب − ۲ج + د − ع = −۴
۲ا − ب + ج − ۲د + ع − ف = −۷
ا − ب + د + ف = ۴

جس سے ا = −۲/۳، ب = ۰، ج = ۳، د = ۴، ع = ۰، ف = −۲/۳

پس (لا^۳ − ۴لا^۲ − ۷لا + ۴) / (لا^۳ − ۱)^۲ = − ۲ / ۳(لا − ۱)^۲ + (۳لا + ۴) / (لا^۲ + لا + ۱)^۲

+ ۲ / ۳(لا^۲ + لا + ۱)

پس دی ہوئی کسر = ۳/۲ لا + ۱/۲ − ۲ / ۳(لا − ۱)^۲ + (۳لا + ۴) / (لا^۲ + لا + ۱)^۲ + ۲ / ۳(لا^۲ + لا + ۱)

مثال (۳)۔ (۲لا + ۵) / (لا − ۱)^۳(لا − ۳) کو جُزئی کسروں میں ظاہر کرو۔

ہم فرض کر سکتے ہیں کہ (۲لا + ۵) / (لا − ۱)^۳(لا − ۳) = ا / (لا − ۱)^۳ + ب / (لا − ۱)^۲ + ج / (لا − ۱) + د / (لا − ۳)

کسور سے صاف کرنے سے

۲لا + ۵ = ا(لا − ۳) + ب(لا − ۱)(لا − ۳) + ج(لا − ۱)^۲(لا − ۳) + د(لا − ۱)^۳

اس آخری مساوات کے دونوں جانب لا^۰، لا^۱، لا^۲، لا^۳ کے سروں کو ایک دُوسرے کے مساوی لکھنے سے ہم کو ہم مقادیر ا، ب، ج، د معلوم کرنے کے لیے چار مساواتیں ملتی ہیں جس سے واضح ہے کہ ہمارا مفروضہ صحیح اور جائز ہے۔ لیکن ا، ب، ج، د کی اصلی قیمتیں دریافت کرنے کے لیے مصرحۂ بالا طریقہ بہترین طریقہ نہیں ہے۔ اس خاص مثال میں مندرجۂ ذیل طریقے سے یہ قیمتیں زیادہ سُرعت کے ساتھ دریافت ہو سکتی ہیں:۔

لا - ۱ کو ما کے مساوی لکھو - تب

$$\text{۲} + \text{۲ ما} + \text{۵} = \text{ا}(\text{ما} - \text{۲}) + \text{ب ما}(\text{ما} - \text{۲}) + \text{ج ما}^{\text{۲}}(\text{ما} - \text{۲}) + \text{د ما}^{\text{۳}}$$

اب ما، ما، $\text{ما}^{\text{۲}}$، $\text{ما}^{\text{۳}}$ کے سروں کو مساوی لکھو اور ہمیں حاصل ہوتی ہیں مساواتیں : ۷ = -۲ ا، ۲ = ا - ۲ ب، ۰ = ب - ۲ ج اور ۰ = د + ج

پس ا = $-\frac{\text{۷}}{\text{۲}}$، ب = $-\frac{\text{۱۱}}{\text{۴}}$، ج = $-\frac{\text{۱۱}}{\text{۸}}$ اور د = $\frac{\text{۱۱}}{\text{۸}}$

لہٰذا

$$\frac{\text{۲ لا} + \text{۵}}{(\text{لا} - \text{۱})^{\text{۳}}(\text{لا} - \text{۲})} = \frac{\text{۱۱}}{\text{۸}(\text{لا} - \text{۲})} - \frac{\text{۷}}{\text{۲}(\text{لا} - \text{۱})^{\text{۳}}} - \frac{\text{۱۱}}{\text{۴}(\text{لا} - \text{۱})^{\text{۲}}} - \frac{\text{۱۱}}{\text{۸}(\text{لا} - \text{۱})}$$

۲۵ — مندرجۂ ذیل مثالوں سے جزئی کسروں کے استعمال کے فوائد عیاں ہونگے :—

(۱) لا کی صعودی قوتوں کے بموجب $\frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{۵ لا} + \text{۶ لا}^{\text{۲}}}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر دریافت کرو۔

$$\frac{\text{۱}}{\text{۱} - \text{۵ لا} + \text{۶ لا}^{\text{۲}}} = \frac{\text{۳}}{\text{۱} - \text{۳ لا}} - \frac{\text{۲}}{\text{۱} - \text{۲ لا}}$$

$$= \text{۳}\left\{\text{۱} + \text{۳ لا} + (\text{۳ لا})^{\text{۲}} + \cdots\cdots + (\text{۳ لا})^{\text{ن}} + \cdots\cdots\right\}$$

$$- \text{۲}\left\{\text{۱} + \text{۲ لا} + (\text{۲ لا})^{\text{۲}} + \cdots\cdots + (\text{۲ لا})^{\text{ن}} + \cdots\cdots\right\}$$

پس مطلوبہ سر $\text{۳}^{\text{ن}+\text{۱}} - \text{۲}^{\text{ن}+\text{۱}}$ ہے۔

(۲) $\frac{(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن}}}{(\text{۱} - \text{۲ لا})^{\text{۳}}}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ن}+\text{ر}}$ کا سر معلوم کرو۔

پہلے ہم $\frac{(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن}}}{(\text{۱} - \text{۲ لا})^{\text{۳}}}$ کے کسری حصہ کو جزئی کسروں میں ظاہر کرینگے۔

فرض کرو

$$\frac{(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن}}}{(\text{۱} - \text{۲ لا})^{\text{۳}}} = \frac{\text{ا}}{(\text{۱} - \text{۲ لا})^{\text{۳}}} + \frac{\text{ب}}{(\text{۱} - \text{۲ لا})^{\text{۲}}} + \frac{\text{ج}}{(\text{۱} - \text{۲ لا})} + \text{ایک صحیح جملہ}$$

تب

$$(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن}} = \text{ا} + \text{ب}(\text{۱} - \text{۲ لا}) + \text{ج}(\text{۱} - \text{۲ لا})^{\text{۲}} + (\text{۱} - \text{۲ لا})^{\text{۳}} \times \text{صحیح جملہ}$$

اب لکھو ۱ - ۲ لا = ما، تب

$$(\text{۱} + \text{لا})^{\text{ن}} = \left(\frac{\text{۳}}{\text{۲}} - \frac{\text{ما}}{\text{۲}}\right)^{\text{ن}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{ن}}}\left(\text{۳}^{\text{ن}} - \text{ن ۳}^{\text{ن}-\text{۱}}\,\text{ما} + \frac{\text{ن}(\text{ن} - \text{۱})}{\text{۱} \times \text{۲}}\,\text{۳}^{\text{ن}-\text{۲}}\,\text{ما}^{\text{۲}} + \right.$$

+ ما کی بلند تر قوتوں والی رقمیں

مساوات کے بائیں جانب $= \text{ا} + \text{ب ما} + \text{ج ما}^{۲} + \text{ما}^{۳} \times$ صحیح جملہ ما کی رقموں میں

پس $\text{ما}^{۰}$، $\text{ما}^{۱}$، $\text{ما}^{۲}$ کے سروں کو باہمدیگر مساوی لکھنے سے

$$\text{ا} = \frac{۳^{\text{ن}}}{۲^{\text{ن}}}،\quad \text{ب} = -\frac{\text{ن}\,۳^{\text{ن}-۱}}{۲^{\text{ن}}}،\quad \text{ج} = \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)\,۳^{\text{ن}-۲}}{۲^{\text{ن}+۱}}$$

اس لیے
$$\frac{(۱+\text{لا})^{\text{ن}}}{(۱-۲\text{لا})^{۳}} = \frac{۳^{\text{ن}}}{۲^{\text{ن}}}\cdot\frac{۱}{(۱-۲\text{لا})^{۳}} - \frac{\text{ن}\,۳^{\text{ن}-۱}}{۲^{\text{ن}}}\cdot\frac{۱}{(۱-۲\text{لا})^{۲}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)\,۳^{\text{ن}-۲}}{۲^{\text{ن}+۱}}\times\frac{۱}{۱-۲\text{لا}}$$

+ ایک صحیح جملہ (ن-۳) ویں درجہ کا۔

پہلی تین رقموں کو مسئلۂ ثنائی کے ذریعہ پھیلانے سے (پہلی مثال کی طرح)، ہمیں $\text{لا}^{\text{ن}+۱}$ کا سر معلوم ہو جاتا ہے۔

۲۶ - کسی کسر کے جزوی کسور میں تحلیل ہونے کے امکان کا ثبوت۔

فرض کرو کہ دی ہوئی کسر $\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ق}(\text{لا})}$ ہے جس میں ف (لا) اور ق (لا) ایسے کثیر رقمی جملے ہیں جن کے درمیان کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے۔ فرض کرو کہ لا - ر نسب نما ق (لا) کا ایک ایسا خطی یا یک درجی جزو ضربی ہے جو م مرتبہ دہرایا جاتا ہے۔ اور $\text{ق}_{۱}(\text{لا})$ بقیہ اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے۔ تب $\text{ق}(\text{لا}) = (\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}}\,\text{ق}_{۱}(\text{لا})$ اور

$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ق}(\text{لا})} = \frac{\text{ف}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}}\,\text{ق}_{۱}(\text{لا})} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

مساوات
$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}}\,\text{ق}_{۱}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}}} + \frac{\text{ف}(\text{لا}) - \text{ا}\,\text{ق}_{۱}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}}\,\text{ق}_{۱}(\text{لا})} \quad \ldots (۲)$$

متماثلاً صحیح ہے، ا خواہ کوئی مستقل ہو۔
اگر ہم ایسا ا دریافت کریں کہ

$$\text{ف}(\text{ر}) - \text{ا}\,\text{ق}_{۱}(\text{ر}) = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

تب ف (لا) - ا ف، (لا)، لا - ر پر تقسیم ہوسکیگا اور ہم اس کی (لا - ر) ف، (لا) کے ذریعہ تعبیر کرسکینگے۔
لیکن ہمارے مفروضہ سے نہ تو ف (لا) اور نہ ف، (لا)، لا - ر پر تقسیم ہوسکتا ہے اور اس لیے ف (ر) ≠ ۰ اور ف، (ر) ≠ ۰
پس (۳) سے

$$\text{ا} = \frac{\text{ف}(\text{ر})}{\text{ف}_{۱}(\text{ر})} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

ایک مستقل جو کہ صفر نہیں ہے۔
ا کی اس قیمت کے ساتھ

$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}}} + \frac{\text{ف}_{۱}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}-۱}\,\text{ف}_{۱}(\text{لا})} \quad \ldots\ldots (۵)$$

یہی طریقہ $\frac{\text{ف}_{۱}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}-۱}\,\text{ف}_{۱}(\text{لا})}$ کے ساتھ استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ف}_{۱}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}-۱}\,\text{ف}_{۱}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}_{۱}}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}-۱}} + \frac{\text{ف}_{۲}(\text{لا})}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}-۲}\,\text{ف}_{۱}(\text{لا})}$$

جس میں $\text{ا}_{۱} = \frac{\text{ف}_{۱}(\text{ر})}{\text{ف}_{۱}(\text{ر})}$ اور (لا - ر) ف۲ (لا) = ف۱ (لا) - ا۱ ف۱ (لا)
لیکن یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ا۱ صفر ہوسکتا ہے اس لئے کہ ف۱ (ر) صفر ہوسکتا ہے - لیکن ا۱ لا متناہی نہیں ہوسکتا اس لیے کہ ف۱ (ر) ≠ ۰
یہ طریقہ متواتر م مرتبہ استعمال کرنے سے

$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}}} + \frac{\text{ا}_{۱}}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}-۱}} + \frac{\text{ا}_{۲}}{(\text{لا}-\text{ر})^{\text{م}-۲}} + \ldots\ldots + \frac{\text{ا}_{\text{م}}}{\text{لا}-\text{ر}} + \frac{\text{ف}_{\text{م}}(\text{لا})}{\text{ف}_{۱}(\text{لا})}$$

جس میں ا، ا۱، ا۲ ..... ام سب محدود مستقل ہیں، جن میں سے صرف ا ایسا ہے جو صفر نہیں ہو سکتا۔
اس استدلال سے یہ واضح ہو سکتا ہے کہ نسب نما کے کسی ایسے خطی

جزوِ ضربی کے لحاظ سے جو م مرتبہ واقع ہوتا ہے، ہم م کسریں فرض کر سکتے ہیں، جن کے شمار کنندے مستقل ہیں اور جن کے نسب نما اِس جزوِ ضربی کی علی الترتیب م۔ ویں، (م - ۱)۔ ویں ...... پہلی قوتیں ہیں۔

ان کسروں کو دُور کرنے کے بعد بقیہ کسر یعنی $\frac{\text{ف}_\text{م}(\text{لا})}{\text{ف}_1(\text{لا})}$ کے ساتھ ہم اسی طرح عمل کر سکتے ہیں۔

مندرجۂ بالا بحث میں ر اور ف (لا) اور ف (لا) کے سر حقیقی ہو سکتے ہیں یا ملتف۔ بدیں وجہ یہ طریقہ علی التواتر، ف (لا) کے ہر ایک جزوِ ضربی کے ساتھ استعمال کیا جا سکتا ہے اور اسی طرح جزئی کسور میں مکمل تحلیل ہو سکتی ہے۔ اگر ف (لا) اور ف (لا) کے حقیقی سر ہوں اور ہم چاہتے ہیں کہ صرف حقیقی کثیر رقمی جملوں کی حد تک اپنے آپ کو محدود رکھیں، تو ہم یہ طریقہ صرف حقیقی خطی اجزائے ضربی کے ساتھ استعمال کرینگے اور آئندہ فصل میں دو درجی اجزائے ضربی سے بحث کرینگے۔

۲۷۔ ایسی صورت میں جبکہ نسب نما ف (لا) کا جزوِ ضربی دو درجی اور بشکل $(\text{لا} - \text{ل})^2 + \text{ب}^2$ ہوتا ہے، جو حقیقی خطی اجزائے ضربی میں تحلیل نہیں ہو سکتا فرض کرو

$$\text{ف}(\text{لا}) = \{(\text{لا} - \text{ل})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{م}}\,\text{ف}_1(\text{لا})$$

تب

$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\{(\text{لا} - \text{ل})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{م}}\,\text{ف}_1(\text{لا})} \quad \ldots\ldots \quad (۱)$$

اب مساوات

$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\{(\text{لا} - \text{ل})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{م}}\,\text{ف}_1(\text{لا})} = \frac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}{\{(\text{لا} - \text{ل})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{م}}} + \frac{\text{ف}(\text{لا}) - (\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})\,\text{ف}_1(\text{لا})}{\{(\text{لا} - \text{ل})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{م}}\,\text{ف}_1(\text{لا})} \quad \ldots (۲)$$

متماثلاً صحیح ہے، ا اور ب کوئی سے مستقل ہیں۔

اگر ہم ا اور ب کی قیمتیں معلوم کریں، ایسی کہ

$$\text{ف}(\text{ل} + \text{ب}\,\text{خ}) - \{\text{ا}(\text{ل} + \text{ب}\,\text{خ}) + \text{ب}\}\,\text{ف}_1(\text{ل} + \text{ب}\,\text{خ}) = ۰ \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور

$$\text{ف}(\text{ل} - \text{ب}\,\text{خ}) - \{\text{ا}(\text{ل} - \text{ب}\,\text{خ}) + \text{ب}\}\,\text{ف}_1(\text{ل} - \text{ب}\,\text{خ}) = ۰$$

تب ف (لا) ۔ (ا لا + ب) ف۱ (لا)، لا ۔ ا ۔ ب خ اور لا ۔ ا + ب خ پر تقسیم ہو سکتا ہے اور اس لیے اُن کے حاصلِ ضرب $(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ب}^2$ پر تقسیم ہو سکتا ہے، اور اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ف}(\text{لا}) - (\text{ا لا} + \text{ب})\,\text{ف}_1(\text{لا}) = \{(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ب}^2\}\,\text{ف}_1(\text{لا})$$

مفروضہ سے نہ تو ف (لا) اور نہ ف۱ (لا)، $(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ب}^2$ پر تقسیم ہو سکتا ہے

لہذا ف (ا ± ب خ) ≠ ۰ اور ف۱ (ا ± ب خ) ≠ ۰

$\dfrac{\text{ف}(\text{ا} + \text{ب خ})}{\text{ف}_1(\text{ا} + \text{ب خ})}$ کو پ + ق خ سے تعبیر کریں اور $\dfrac{\text{ف}(\text{ا} - \text{ب خ})}{\text{ف}_1(\text{ا} - \text{ب خ})}$ کو پ ۔ ق خ سے تعبیر کریں تو ہمیں حاصل ہونگی مساواتیں

ا (ا + ب خ) + ب = پ + ق خ

اور ا (ا ۔ ب خ) + ب = پ ۔ ق خ

جہاں پ اور ق محدود مقداریں ہیں ایسی کہ دونوں ممکن ہے کہ ایک ہی وقت میں صفر نہ ہوں

∴ ا ا + ب = پ

ب ا = ق

ایسی دو مثالیں جن سے معلوم ہوتا ہے کہ ا اور ب حقیقی محدود قیمتیں رکھتے ہیں جو وقتِ واحد میں دونوں صفر نہیں ہو سکتے۔

ا اور ب کی ان قیمتوں کے ساتھ

$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\{(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{ر}}} + \frac{\text{ف}_1(\text{لا})}{\{(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{ر}-1}\,\text{ف}_1(\text{لا})}$$

اور اس طریقہ کو یک درجی جزوِ ضربی کی مثال کی طرح دُہرانے سے ہم بالآخر دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\{(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{ر}}} + \frac{\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1}{\{(\text{لا} - \text{ا})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{ر}-2}} + \dots + \frac{\text{فم}(\text{لا})}{\text{ف}_1(\text{لا})}$$

یہ ظاہر کرنا ضروری ہے کہ ممکن ہے کہ ا اور ب ایک ہی وقت میں صفر

نہ ہوں اور دوسرے مستقلوں میں سے کوئی بھی یا سب کے سب ممکن ہے کہ صفر ہوں۔

ظاہر ہے کہ یہی طریقہ ف (لا) کے دو درجی اجزائے ضربی میں سے ہر ایک کے ساتھ استعمال ہو سکتا ہے۔

الحاصل اگر

$$\text{ف}(\text{لا}) = (\text{لا} - \text{ر}_1)^{\text{م}} (\text{لا} - \text{ر}_2)^{\text{ن}} \cdots\cdots \{(\text{لا} - \text{و})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{ل}} \cdots\cdots$$

اور ہم مندرجۂ بالا طریقے علی التواتر یک درجی اجزائے ضربی کے ساتھ استعمال کریں اور پھر دو درجی اجزائے ضربی کے ساتھ علی التواتر استعمال کریں تو بالآخر

$$\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})} = \frac{\text{ا}}{(\text{لا} - \text{ر}_1)^{\text{م}}} + \frac{\text{ا}_1}{(\text{لا} - \text{ر}_1)^{\text{م}-1}} + \cdots\cdots + \frac{\text{ا}_{\text{م}}}{\text{لا} - \text{ر}_1}$$

$$+ \frac{\text{ب}}{(\text{لا} - \text{ر}_2)^{\text{ن}}} + \frac{\text{ب}_1}{(\text{لا} - \text{ر}_2)^{\text{ن}-1}} + \cdots\cdots + \frac{\text{ب}_{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ر}_2}$$

- -

$$+ \frac{\text{ج لا} + \text{د}}{\{(\text{لا} - \text{و})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{ل}}} + \frac{\text{ج}_1\text{لا} + \text{د}_1}{\{(\text{لا} - \text{و})^2 + \text{ب}^2\}^{\text{ل}-1}} + \cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{\text{ج}_{\text{ل}}\text{لا} + \text{د}_{\text{ل}}}{(\text{لا} - \text{و})^2 + \text{ب}^2} + \cdots\cdots\cdots + \bar{\text{ا}}$$

جہاں $\bar{\text{ا}}$ یا تو صفر ہے یا لا کا ایک صحیح جملہ ہے۔

لیکن اگر ف (لا) کا درجہ ف (لا) کے درجہ سے کمتر ہے، اور یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ہم دی ہوئی کسر کو ہمیشہ فی الواقعی عمل تقسیم سے اس حالت میں تحویل کر سکتے ہیں $\frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ف}(\text{لا})}$ اور تمام کسریں مساوات کے بائیں جانب کی صفر ہو جاتی ہیں جبکہ لا $\doteq \infty$، اس لیئے $\bar{\text{ا}}$ صفر ہے اور دی ہوئی کسر مصرحہ جزئی کسور میں تحلیل ہو جاتی ہے۔

دوسرے باب کی مثالیں

مندرجۂ ذیل کسروں کو جزئی کسور میں تحلیل کرو۔

(۱) $\frac{۴ - ۹ل}{(۱ - ۲ل)(۱ - ۳ل)}$　　(۲) $\frac{۴ + ۵ل}{(۱ - ل)^{۲}}$

(۳) $\frac{۳ل^{۲} + ۷ل + ۲}{(ل + ۱)(ل^{۲} + ۲ل + ۵)}$　　(۴) $\frac{ل + ۱}{ل^{۴} + ۱}$

(۵) $\frac{ل^{۲} + ل + ۱}{ل^{۳} - ۴ل^{۲} + ل + ۶}$　　(۶) $\frac{۱ + ۷ل - ل^{۲}}{(۱ + ۳ل)^{۲}(۱ - ۱۰ل)}$

(۷) $\frac{ل^{۳} + ۲}{(ل - ۲)^{۲}(ل^{۲} + ۱)}$　　(۸) $\frac{۱ + ۲ل}{ل^{۲}(ل + ۲)^{۳}(ل + ۱)}$

(۹) ثابت کرو کہ $\frac{ل + ۵}{(ل^{۲} - ۱)(ل + ۲)}$ کے پھیلاؤ میں $ل^{۲ن-۱}$ کا سر

$۱ - \frac{۱}{۲^{۲ن}}$ ہے

(۱۰) $\frac{ل - ۲}{(ل + ۲)(ل - ۱)^{۲}}$ کے پھیلاؤ میں $ل^{ن}$ کا سر دریافت کرو۔

(۱۱) ثابت کرو کہ $\frac{۱}{۱ - ل} + \frac{ا}{۱ - ا ل} + \frac{ا^{۲}}{۱ - ا^{۲} ل} + \frac{ا^{۳}}{۱ - ا^{۳} ل} + \cdots$

$= \frac{۱}{۱ - ا} + \frac{ل}{۱ - ل ا} + \frac{ل^{۲}}{۱ - ل^{۲} ا} + \frac{ل^{۳}}{۱ - ل^{۳} ا} + \cdots$

تیسرا باب

مقطّعات

(Determinants)

۲۸ — مقطّعات مسائلِ طبیعیات میں زیادہ تر پیچیدہ اور متعدد نامعلوم مقادیر کی ہمزاد مساواتوں کے حل کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔ اس لیے ہم اس باب کا آغاز آسان ہمزاد مساواتوں کی مثال سے شروع کرتے ہیں۔

اگر خطی (یعنی یک درجی) مساواتیں

$$ا_1 \, لا + ب_1 \, ما + ج_1 = 0$$

$$ا_2 \, لا + ب_2 \, ما + ج_2 = 0$$

دی جائیں تو ابتدائی الجبرا کے طریقوں سے بآسانی مستنبط ہوتا ہے کہ

$$لا = \frac{ب_1 ج_2 - ب_2 ج_1}{ا_1 ب_2 - ب_1 ا_2}$$

اور

$$ما = \frac{ج_1 ا_2 - ا_1 ج_2}{ا_1 ب_2 - ب_1 ا_2}$$

ان کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں :—

$$\frac{لا}{ب_1 ج_2 - ج_1 ب_2} = \frac{ما}{ج_1 ا_2 - ا_1 ج_2} = \frac{1}{ا_1 ب_2 - ب_1 ا_2}$$

اور چونکہ تینوں نسب نما ایک ہی شکل کے ہیں اس لیے ان میں سے ہر ایک کی بہ نظرِ سہولت ایک خاص علامت کے ذریعہ تعبیر ہو سکتی ہے :— چنانچہ

$$ا_1 ب_2 - ب_1 ا_2 \equiv \begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 \\ ا_2 & ب_2 \end{vmatrix}$$

اس متماثل مساوات کے بائیں جانب کے رُکن کو مقطعہ (Determinant) کہتے ہیں اور سیدھے جانب کے رُکن کو مقطعہ کا پھیلاؤ۔ اعداد ا_1، ب_1، ا_2، ب_2 کو مقطعہ کے اجزائے ترکیبی (Elements) کہتے ہیں، اور چونکہ ہر ایک رقم مقطعہ کے پھیلاؤ میں، دو اجزائے ترکیبی کا حاصلِ ضرب ہے، یہ مقطعہ دوسرے رُتبہ (Order) کا کہلاتا ہے۔

پس دوسرے رُتبہ کے مقطعہ کا پھیلاؤ اس طرح عمل میں آتا ہے کہ سیدھے جانب سے بائیں جانب کو نیچے کی طرف گزرنے والے وتر پر کے اجزائے ترکیبی کا حاصلِ ضرب لیا جائے اور اس میں سے دوسرے وتر پر کے اجزائے ترکیبی کا حاصلِ ضرب تفریق کیا جائے۔

لا اور ما کے نسبت نماؤں کو بھی اگر اسی طرح تعبیر کیا جائے تو مساواتوں

$$\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1 = 0$$
$$\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2 = 0$$

کا حل یوں لکھا جا سکتا ہے:

$$\frac{\text{لا}}{\begin{vmatrix} \text{ب}_1 & \text{ج}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ج}_2 \end{vmatrix}} = \frac{\text{ما}}{\begin{vmatrix} \text{ج}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ا}_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{ا}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

جس میں ہر ایک نسب نما، سروں کو دائری (Cyclic) ترتیب میں دو متناظر صفوں میں لکھنے سے، جبکہ زیرِ تعیین مقدار کے متعلقہ رقوم متروک کر دئیے جاتے ہیں، تیار ہوتا ہے۔

دائری ترتیب کا مفہوم یہ ہے کہ ا کے بعد ب لکھا جائے، ب کے بعد ج، اور ج کے بعد ا۔ گویا کہ کسی دائرے کے محیط کے گرد ا، ب اور ج سروں کو لکھ کر ترتیب وار ایک سرے سے دوسرے سر کی طرف گزریں۔

مثال (۱)۔۔ مقطعات ذیل کو پھیلاؤ:۔

(i) $\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} \text{ا}+\text{ب} & 2\text{ب} \\ 2\text{ا} & \text{ا}+\text{ب} \end{vmatrix}$

اور (iii) حل کرو

$$\begin{vmatrix} 10\text{لا} & 5 \\ -9 & 2\text{لا} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{لا} & -3 \\ 17 & 7 \end{vmatrix}$$

عمل (i)

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 8\times 6 - 5\times 9 = 48 - 45$$
$$= 3$$

(ii)

$$\begin{vmatrix} \text{ا}+\text{ب} & 2\text{ب} \\ 2 & \text{ا}+\text{ب} \end{vmatrix}$$
$$= (\text{ا}+\text{ب})^2 - 4\text{اب} = (\text{ا}-\text{ب})^2$$

(iii) مساوات

$$\begin{vmatrix} 10\text{لا} & 5 \\ -9 & 2\text{لا} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{لا} & -3 \\ 17 & 7 \end{vmatrix}$$

کو پھیلانے سے حاصل ہوتی ہے مساوات $20\text{لا}^2 + 45 = 7\text{لا} + 51$

یا $20\text{لا}^2 - 7\text{لا} - 6 = 0$

یعنی $(4\text{لا} - 3)(5\text{لا} + 2) = 0$

جس سے لا = ۰٫۷۵ یا −۰٫۴

مثال (۲)۔ ہمزاد مساواتوں

$8\text{لا} - \text{ما} = -25$ ، $5\text{لا} + 2\text{ما} = 29$ کو حل کرو

ان مساواتوں کو مناسب ترتیب میں لکھنے سے

$$8\text{لا} - \text{ما} + 25 = 0$$
$$5\text{لا} + 2\text{ما} - 29 = 0$$

مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\therefore \frac{\text{لا}}{\begin{vmatrix} -1 & 25 \\ 2 & -29 \end{vmatrix}} = \frac{\text{ما}}{\begin{vmatrix} 25 & 8 \\ -29 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}$$

یا

$$\frac{\text{لا}}{-21} = \frac{\text{ما}}{357} = \frac{1}{21}$$

$$\text{لا} = -1 \quad ، \quad \text{ما} = 17$$

۲۹- تین غیر معلوم مقادیر کی مساواتیں — ذیل کی ہمزاد خطّی مساواتوں پر غور کرو :—

$$ا_1 لا + ب_1 ما + ج_1 ی + د_1 = 0$$
$$ا_2 لا + ب_2 ما + ج_2 ی + د_2 = 0$$
$$ا_3 لا + ب_3 ما + ج_3 ی + د_3 = 0$$

ان کو معمولی اسقاط کے ذریعہ حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے :—

$$لا = \frac{(ب_1 د_2 ج_3 + ج_1 ب_2 د_3 + د_1 ج_2 ب_3 - ب_1 ج_2 د_3 - ج_1 د_2 ب_3 - د_1 ب_2 ج_3)}{ھ}$$

$$ما = \frac{(ج_1 د_2 ا_3 + د_1 ا_2 ج_3 + ا_1 ج_2 د_3 - ا_1 د_2 ج_3 - ج_1 ا_2 د_3 - د_1 ج_2 ا_3)}{ھ}$$

$$ی = \frac{(ب_1 ا_2 د_3 + د_1 ب_2 ا_3 + ا_1 د_2 ب_3 - ا_1 ب_2 د_3 - ب_1 د_2 ا_3 - د_1 ا_2 ب_3)}{ھ}$$

جہاں $ھ = ا_1 ب_2 ج_3 + ب_1 ج_2 ا_3 + ج_1 ا_2 ب_3 - ج_1 ب_2 ا_3 - ا_1 ج_2 ب_3 - ب_1 ا_2 ج_3$

$$= ا_1 (ب_2 ج_3 - ج_2 ب_3) + ب_1 (ج_2 ا_3 - ا_2 ج_3) + ج_1 (ا_2 ب_3 - ب_2 ا_3)$$

$$= ا_1 \begin{vmatrix} ب_2 & ج_2 \\ ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} + ب_1 \begin{vmatrix} ج_2 & ا_2 \\ ج_3 & ا_3 \end{vmatrix} + ج_1 \begin{vmatrix} ا_2 & ب_2 \\ ا_3 & ب_3 \end{vmatrix}$$

فصل ۲۸ کے مطابق ھ کی تعبیر علامت کے ذریعہ ذیل کے مقطعہ سے ہو سکتی ہے :—

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

جو کہ تیسرے رُتبہ کا مقطعہ ہے۔ پس

$$\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} = ا_1 \begin{vmatrix} ب_2 & ج_2 \\ ب_3 & ج_3 \end{vmatrix} + ب_1 \begin{vmatrix} ج_2 & ا_2 \\ ج_3 & ا_3 \end{vmatrix} + ج_1 \begin{vmatrix} ا_2 & ب_2 \\ ا_3 & ب_3 \end{vmatrix}$$

پس $ا_1$ کا سر وہ مقطعہ ہے جو $ا_1$ والی صف اور کالم کو ساقط کرنے سے بنتا ہے۔

اسی طرح ب۱ اور ج۱ کے لیے بھی بشرطیکہ ہر صف کے اجزاے ترکیبی دائری ترتیب میں لیے جائیں۔ ان دوسرے رتبہ کے مقطعات میں سے ہر ایک اُس جزوِ ترکیبی کا صغیر کہلاتا ہے جو اس کو ضرب دیتا ہے۔

لا کی قیمت کا جو جملہ ہے اُس کا شمار کنندہ

$$ب_2 د_3 ج_1 + ج_2 ب_3 د_1 + د_2 ج_3 ب_1 - ب_3 ج_2 د_1 - ج_3 د_2 ب_1 - د_3 ب_2 ج_1$$

$$= - ب_1 (ج_2 د_3 - د_2 ج_3) - ج_1 (د_2 ب_3 - ب_2 د_3) - د_1 (ب_2 ج_3 - ج_2 ب_3)$$

$$= - ب_1 \begin{vmatrix} ج_2 & د_2 \\ ج_3 & د_3 \end{vmatrix} - ج_1 \begin{vmatrix} د_2 & ب_2 \\ د_3 & ب_3 \end{vmatrix} - د_1 \begin{vmatrix} ب_2 & ج_2 \\ ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} ب_1 & ج_1 & د_1 \\ ب_2 & ج_2 & د_2 \\ ب_3 & ج_3 & د_3 \end{vmatrix}$$

اسی بموجب ما اور ی کی قیمتوں کے شمار کنندہ مقطعات کی شکل میں لکھے جاسکتے ہیں۔

پس مساواتوں

$$ا_1 لا + ب_1 ما + ج_1 ی = ۰$$
$$ا_2 لا + ب_2 ما + ج_2 ی = ۰$$
$$ا_3 لا + ب_3 ما + ج_3 ی = ۰$$

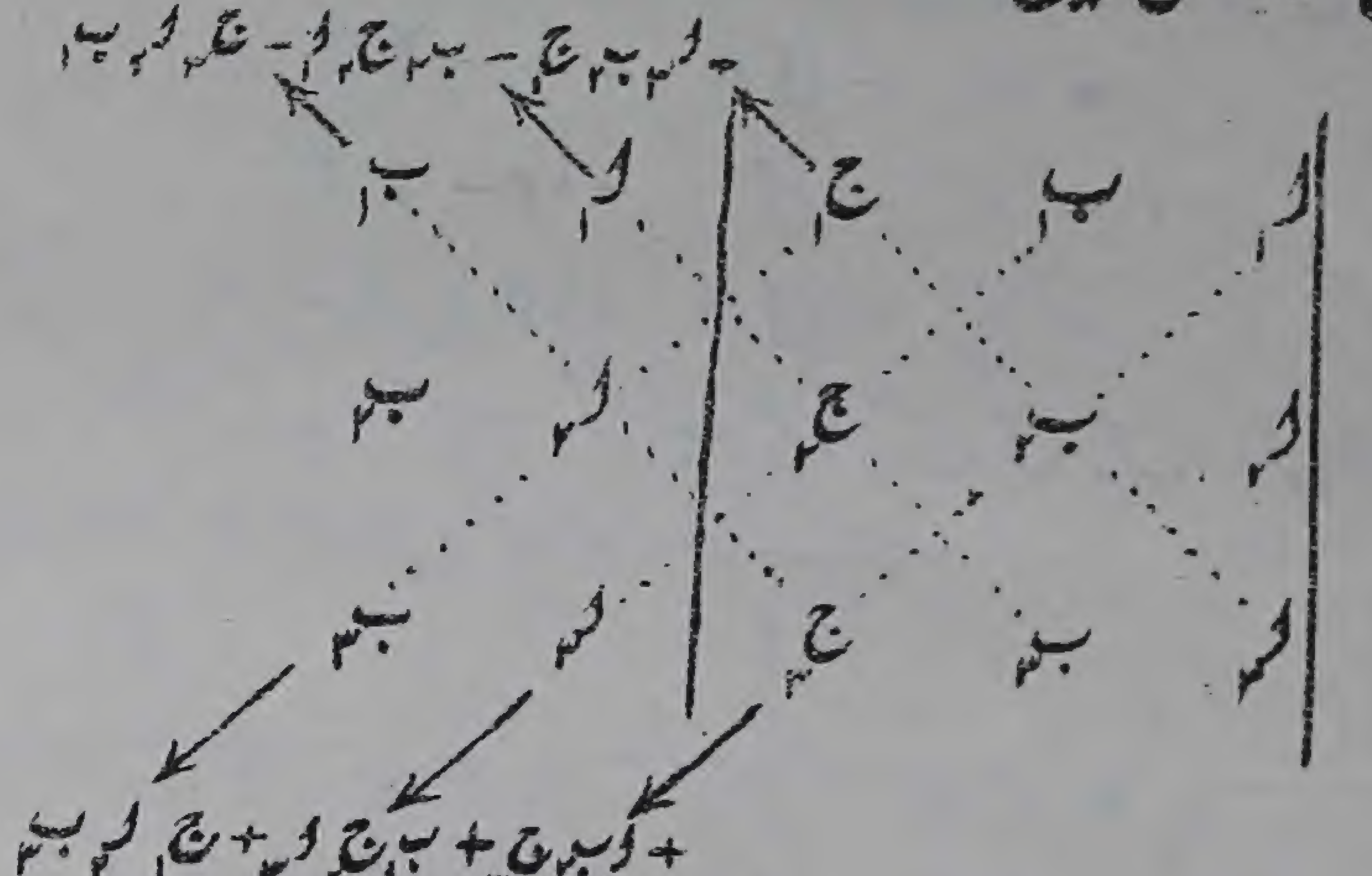
کا حل ذیل کی مقطعاتی شکل میں لکھا جاسکتا ہے:-

$$\frac{- لا}{\begin{vmatrix} ب_1 & ج_1 & د_1 \\ ب_2 & ج_2 & د_2 \\ ب_3 & ج_3 & د_3 \end{vmatrix}} = \frac{ما}{\begin{vmatrix} ج_1 & د_1 & ا_1 \\ ج_2 & د_2 & ا_2 \\ ج_3 & د_3 & ا_3 \end{vmatrix}} = \frac{- ی}{\begin{vmatrix} د_1 & ا_1 & ب_1 \\ د_2 & ا_2 & ب_2 \\ د_3 & ا_3 & ب_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} ا_1 & ب_1 & ج_1 \\ ا_2 & ب_2 & ج_2 \\ ا_3 & ب_3 & ج_3 \end{vmatrix}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

ان کے نسب نما ٹھیک اس طرح تیار ہوئے ہیں جیسے کہ فصل (۱) کی مساواتوں کی صورت میں ہوا ہے۔ لیکن علامتیں تبادلاً منفی اور مثبت ہیں تاکہ دائری ترتیب قایم رہے۔

تیسرے رُتبہ کا مقطعہ سارُس کے قاعدے (Rule of Sarrus)

سے بآسانی پھیلایا جاسکتا ہے۔ چنانچہ مقطعہ کے سیدھے جانب کے پہلے دو کالموں کو دُہرانے کے بعد مصرحہ چھ وتروں میں سے ہر ایک پر کے اجزائے ترکیبی کے حاصل ضربوں کا مجموعہ لینے سے پھیلاؤ لکھا جاسکتا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جو حاصل ضرب نیچے کی طرف لیے جاتے ہیں وہ مثبت ہیں اور جو اوپر کی طرف لیے جاتے ہیں وہ منفی ہیں۔



مثال ۳ — مندرجۂ ذیل مقطعات کو پھیلاؤ :-

(ا) $\begin{vmatrix} ۱ & ۶ & ۷ \\ ۲ & ۵ & ۸ \\ ۳ & ۴ & ۹ \end{vmatrix}$ (ب) $\begin{vmatrix} ۱ & \text{جب ط} & ۲ \\ \text{جب ط} & ۱ & \text{جم ط} \\ ۰ & \text{جم ط} & ۱ \end{vmatrix}$

حل (ا) $\begin{vmatrix} ۱ & ۶ & ۷ \\ ۲ & ۵ & ۸ \\ ۳ & ۴ & ۹ \end{vmatrix} = ۱ \begin{vmatrix} ۵ & ۸ \\ ۴ & ۹ \end{vmatrix} + ۶ \begin{vmatrix} ۸ & ۲ \\ ۹ & ۳ \end{vmatrix} + ۷ \begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix}$

$= ۱۳ + ۳۶ - ۴۹ = ۰$

یا سارُس کے قاعدے سے پھیلانے سے، مقطعہ

= ۱×۵×۹ + ۶×۸×۳ + ۷×۲×۴ - ۳×۵×۷ - ۴×۸×۱ - ۹×۲×۶

= ۴۵ + ۱۴۴ - ۵۶ - ۱۰۵ - ۳۲ - ۱۰۸ = ۰

(ب) اسی طرح

۱	جب ط	۲
جب ط	۱	جم ط
۰	جم ط	۱

= ۱ + ۰ + ۲ جب ط جم ط - ۰ - جم² ط - جب² ط

= ۲ جب ط جم ط = جب ۲ط

مثال ۴ - مقطعات کے ذریعہ ذیل کی مساواتیں حل کرو:-

۴ لا + ما + ۲ ی - ۱۵ = ۰

۳ لا - ۲ ما - ی - ۷ = ۰

۷ لا + ۳ ما - ۳ ی + ۱۰ = ۰

چونکہ یہہ مساواتیں مناسب ترتیب میں لکھی گئی ہیں۔ ان کا حل 'نتیجہ (۲)' کے ذریعہ سے علامتاً یوں لکھا جا سکتا ہے:-

- لا ÷

۱	۲	-۱۵
-۲	-۱	-۷
۳	-۳	۱۰

= ما ÷

۲	-۱۵	۴
-۱	-۷	۳
-۳	۱۰	۷

= - ی ÷

-۱۵	۴	۱
-۷	۳	-۲
۱۰	۷	۳

= ۱ ÷

۴	۱	۲
۳	-۲	-۱
۷	۳	-۳

جو مقطعات کو پھیلانے سے ہو جاتے ہیں:-

لا / ۱۹۸ = ما / -۲۵۲ = ی / ۴۲۰ = ۱ / ۸۴

جس سے لا = ۲، ما = -۳، ی = ۵

۳۰- ن غیر معلوم مقادیر کے لیے عام حل - مقطعات

کے ذریعہ حل کرنے کا طریقہ ٹھیک اسی طرح کسی بھی خطی مساواتوں کے نظام پر عاید کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ

$$\text{ا}_{۱۱}\,\text{لا}_{۱} + \text{ا}_{۱۲}\,\text{لا}_{۲} + \text{ا}_{۱۳}\,\text{لا}_{۳} + \dots + \text{ا}_{۱ن}\,\text{لا}_{ن} + \text{ک}_{۱} = ۰$$

$$\text{ا}_{۲۱}\,\text{لا}_{۱} + \text{ا}_{۲۲}\,\text{لا}_{۲} + \text{ا}_{۲۳}\,\text{لا}_{۳} + \dots + \text{ا}_{۲ن}\,\text{لا}_{ن} + \text{ک}_{۲} = ۰$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\text{ا}_{ن۱}\,\text{لا}_{۱} + \text{ا}_{ن۲}\,\text{لا}_{۲} + \text{ا}_{ن۳}\,\text{لا}_{۳} + \dots + \text{ا}_{نن}\,\text{لا}_{ن} + \text{ک}_{ن} = ۰$$

ن متجانس خطّی مساواتوں کا ایک نظام ہے۔ تب ان کا حل اس شکل میں لکھا جا سکتا ہے:

$$\frac{\text{لا}_{۱}}{(-۱)^{ن}\,\text{ق}_{۱}} = \frac{\text{لا}_{۲}}{\text{ق}_{۲}} = \frac{\text{لا}_{۳}}{(-۱)^{ن}\,\text{ق}_{۳}} = \frac{\text{لا}_{۴}}{\text{ق}_{۴}} = \dots = \frac{۱}{\text{ق}_{۰}} \quad \dots\dots (۳)$$

جس میں $\text{ق}_{۰}$ سروں کا مقطعہ ہے جبکہ مطلق رقموں کا کالم متروک کر دیا جاتا ہے۔ اور $\text{ق}_{ر}$ ($\text{ر} = ۱، ۲، ۳ \dots ن$) سروں کا وہ مقطعہ ہے جو $\text{لا}_{ر}$ کی رقموں کا کالم متروک کر دینے اور ہر ایک صف کو دائری ترتیب میں لکھنے سے بنتا ہے۔ ان میں سے ہر ایک مقطعہ ن ویں رتبہ کا ہوگا، اور اس کی ضرورت ہوتی ہے کہ مختصراً ان اصولوں کا امتحان کریں جن کے لحاظ سے تیسرے سے بلند تر رتبہ کا مقطعہ پھیلایا جا سکتا ہے۔

مثال ۵ - مقطعہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ا}_{۲} & \text{ا}_{۳} \\ \text{ب}_{۱} & \text{ب}_{۲} & \text{ب}_{۳} \\ \text{ج}_{۱} & \text{ج}_{۲} & \text{ج}_{۳} \end{vmatrix}$$

کے اہم خواص معلوم کرو [جامعۂ لندن]

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{۱} & \text{ا}_{۲} & \text{ا}_{۳} \\ \text{ب}_{۱} & \text{ب}_{۲} & \text{ب}_{۳} \\ \text{ج}_{۱} & \text{ج}_{۲} & \text{ج}_{۳} \end{vmatrix} = \text{ا}_{۱}\begin{vmatrix} \text{ب}_{۲} & \text{ب}_{۳} \\ \text{ج}_{۲} & \text{ج}_{۳} \end{vmatrix} + \text{ا}_{۲}\begin{vmatrix} \text{ب}_{۳} & \text{ب}_{۱} \\ \text{ج}_{۳} & \text{ج}_{۱} \end{vmatrix} + \text{ا}_{۳}\begin{vmatrix} \text{ب}_{۱} & \text{ب}_{۲} \\ \text{ج}_{۱} & \text{ج}_{۲} \end{vmatrix}$$

$$= \text{ا}_{۱}(\text{ب}_{۲}\text{ج}_{۳} - \text{ب}_{۳}\text{ج}_{۲}) + \text{ا}_{۲}\text{ب}_{۳}\text{ج}_{۱} - \text{ا}_{۲}\text{ب}_{۱}\text{ج}_{۳} + \text{ا}_{۳}\text{ب}_{۱}\text{ج}_{۲} - \text{ا}_{۳}\text{ب}_{۲}\text{ج}_{۱}$$

$$= \text{ا}_1(\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ب}_3\text{ج}_2) + \text{ب}_1(\text{ج}_2\text{ا}_3 - \text{ج}_3\text{ا}_2) + \text{ج}_1(\text{ا}_2\text{ب}_3 - \text{ا}_3\text{ب}_2)$$

$$= \begin{vmatrix} \text{ج}_1 & \text{ب}_1 & \text{ا}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ب}_2 & \text{ا}_2 \\ \text{ج}_3 & \text{ب}_3 & \text{ا}_3 \end{vmatrix}$$

پس (۱) کسی مقطعہ کی قیمت نہیں تبدیل ہوتی ہے اگر اس کے کالموں کو صفوں میں اور صفوں کو کالموں میں تبدیل کردیں۔

مندرجۂ بالا پھیلاؤ یوں بھی لکھا جاسکتا ہے:۔

$$-\{\text{ا}_2(\text{ب}_1\text{ج}_3 - \text{ب}_3\text{ج}_1) + \text{ا}_1(\text{ب}_3\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_3) + \text{ا}_3(\text{ب}_2\text{ج}_1 - \text{ب}_1\text{ج}_2)\}$$

$$= - \begin{vmatrix} \text{ا}_3 & \text{ا}_1 & \text{ا}_2 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_1 & \text{ب}_2 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_1 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}.$$

پس (۲) کسی مقطعہ کی علامت تبدیل ہو جاتی ہے اگر اس کی دو صفیں یا اس کے دو کالم باہمدیگر تبدیل کیے جاتے ہیں۔

اسی پھیلاؤ سے یہ فوراً واضح ہوتا ہے کہ اگر $\text{ا}_3 = \text{ا}_2$، $\text{ب}_3 = \text{ب}_2$ اور $\text{ج}_3 = \text{ج}_2$ تو مقطعہ کی قیمت صفر ہو جاتی ہے۔ پس

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_2 & \text{ا}_1 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_2 & \text{ب}_1 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_2 & \text{ج}_1 \end{vmatrix} = 0$$

پس (۳) جب دو صفیں یا کالم متماثل ہوں تو مقطعہ صفر ہو جاتا ہے۔

اب فرض کرو کہ ا_1، ب_1، ج_1 کے عوض علی الترتیب م ا_1، م ب_1، م ج_1 لکھے جاتے ہیں؛

تب مقطعہ کو پھیلانے سے فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{م}\,\text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{م}\,\text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{م}\,\text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \text{م} \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

پس (۴) کسی صف یا کالم کے ہر جزوِ ترکیبی کو کسی دیے ہوئے جزوِ ضربی سے ضرب دینے کا نتیجہ وہی ہوتا ہے جو مقطعہ کو اِس جزوِ ضربی سے ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے۔

اب فرض کرو کہ $\text{ا}_1 = \text{ع}_1 + \text{ف}$، $\text{ب}_1 = \text{ب}'_1 + \text{ق}$، $\text{ج}_1 = \text{ج}'_1 + \text{ک}$

تب مقطعہ کو پھیلانے سے اس کی شکل

$$(\text{ع}_1 + \text{ف})(\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ب}_3\text{ج}_2) + \text{ا}_2(\text{ب}_3\text{ج}'_1 + \text{ب}_3\text{ک} - \text{ب}'_1\text{ج}_3 - \text{ج}_3\text{ق})$$
$$+ \text{ا}_3(\text{ب}'_1\text{ج}_2 + \text{ج}_2\text{ق} - \text{ب}_2\text{ج}'_1 - \text{ب}_2\text{ک})$$
$$= \left\{\text{ع}_1(\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ب}_3\text{ج}_2) + \text{ا}_2(\text{ب}_3\text{ج}'_1 - \text{ب}'_1\text{ج}_3) + \text{ا}_3(\text{ب}'_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}'_1)\right\}$$
$$+ \left\{\text{ف}(\text{ب}_2\text{ج}_3 - \text{ب}_3\text{ج}_2) + \text{ا}_2(\text{ب}_3\text{ک} - \text{ج}_3\text{ق}) + \text{ا}_3(\text{ج}_2\text{ق} - \text{ب}_2\text{ک})\right\}$$

جو تین درجے کے دو مقطعوں کے پھیلاؤں کا مجموعہ ہے - پس

$$\begin{vmatrix} \text{ع}_1 + \text{ف} & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}'_1 + \text{ق} & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}'_1 + \text{ک} & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ع}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}'_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}'_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ف} & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ق} & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ک} & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

پس (۵) جب کسی صف یا کالم کا ہر ایک جزوِ ترکیبی دو یا زائد رقموں کے جبری مجموعہ پر مشتمل ہوتا ہے تو مقطعہ دو یا زائد مقطعوں کا حاصلِ جمع ہوتا ہے جن میں سے ہر ایک کا جزوِ ترکیبی ایک واحد رقم پر مشتمل ہوتا ہے۔

اس خاصیت اور خاصیت (۴) سے بآسانی واضح ہوتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_1+\text{ف}\,\text{ا}_2-\text{ق}\,\text{ا}_3 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1+\text{ف}\,\text{ب}_2-\text{ق}\,\text{ب}_3 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1+\text{ف}\,\text{ج}_2-\text{ق}\,\text{ج}_3 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} + \text{ف} \begin{vmatrix} \text{ا}_2 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_2 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_2 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix} - \text{ق} \begin{vmatrix} \text{ا}_3 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_3 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_3 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{ا}_1 & \text{ا}_2 & \text{ا}_3 \\ \text{ب}_1 & \text{ب}_2 & \text{ب}_3 \\ \text{ج}_1 & \text{ج}_2 & \text{ج}_3 \end{vmatrix}$$

اس لیے کہ آخری دو مقطعے ازروئے مسئلہ (۳) صفر ہو جاتے ہیں۔

پس (۶) ایک یا زیادہ صفوں یا کالموں کے اجزائے ترکیبی کے مساوی حاصل اضعاف (Equi-multiples) جبری طور پر کسی دوسری صف یا کالم کے متناظر اجزائے ترکیبی کے ساتھ جمع کیے جاتے ہیں تو مقطعہ کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی ہے۔

۳۱۔ ن غیر معلوم مقادیر میں عام نظام۔

فصل (۳) میں تیسرے رتبہ کے مقطعہ کے لیے جو خواص ثابت کیے گئے ہیں بالکل عام ہیں اور تمام رتبوں کے مقطعوں پر حاوی ہیں۔ ن ویں رتبہ کے مقطعہ کے لئے پھیلاؤ صغائر (Minors) کے ذریعہ عمل میں لایا جا سکتا ہے۔

چنانچہ فرض کرو

$$\text{ق} = \begin{vmatrix} \text{ا}_{11} & \text{ا}_{21} & \text{ا}_{31} & \cdots & \text{ا}_{\text{ن}1} \\ \text{ا}_{12} & \text{ا}_{22} & \text{ا}_{32} & \cdots & \text{ا}_{\text{ن}2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{ا}_{1\text{ن}} & \text{ا}_{2\text{ن}} & \text{ا}_{3\text{ن}} & \cdots & \text{ا}_{\text{نن}} \end{vmatrix}$$

پس پہلا پھیلاؤ دیا جاتا ہے بذریعہ

ق = ا۱۱ ل۱ − ا۲۱ ل۲ + ا۳۱ ل۳ .... + (−۱)^ن−۱ ان۱ لن ..... (۴)

جہاں لر (ر = ۱، ۲، ۳ ... ن) صغیر ہے ار۱ کا۔ اور وہ ایک مقطعہ ہے جو ار۱ والی صف اور کالم کو متروک کر دینے اور صفوں کو دائری ترتیب میں لکھنے سے تیار ہوتا ہے۔ ہر ایک صغیر (ن−۱) ویں رتبہ کا ہے جبکہ ق، ن ویں رتبہ کا ہے۔ مقطعات کے حل میں عملاً اس قاعدے کے ساتھ مصرحہ بالا چھ خواص سے مدد لی جاتی ہے۔ جیسا کہ ذیل کی مثال سے ظاہر ہوگا۔

مثال (۶) مساواتوں

۱۶ لا − ۱۲ ما + ۷ ی + ۱۵ سہ + ۳ = ۰

۲۲ لا − ۳ ما + ۳ ی + ۱۱ سہ + ۲ = ۰

۷۶ لا + ۱۰ ما − ۱۱ ی + ۱۶ سہ + ۴ = ۰

−۶ لا − ۳۸ ما + ۱۰ ی + ۱۹ سہ + ۵ = ۰

کو حل کرو، پہلے لا معلوم کر کے، اور پھر لا کی قیمت کو کام میں لا کر دیے ہوئے نظام کو تین ہمزاد مساواتوں میں محوّل کر کے۔

لا کی قیمت ملتی ہے بذریعہ

لا / ق۱ = ۱ / ق

جہاں ق۱ =

۳	۱۵	۷	−۱۲
۲	۱۱	۳	−۳
۴	۱۶	−۱۱	۱۰
۵	۱۹	۱۰	−۳۸

اور ق =

۱۵	۷	−۱۲	۱۶
۱۱	۳	−۳	۲۲
۱۶	−۱۱	۱۰	۷۶
۱۹	۱۰	−۳۸	−۶

پہلے ق۱ کو لو

ق۱ = (ازروئے مسئلہ (۶))

۳	۱۵ − ۱۵	۷	−۱۲ + ۱۴
۲	۱۱ − ۱۰	۳	−۳ + ۶
۴	۱۶ − ۲۰	−۱۱	۱۰ − ۲۲
۵	۱۹ − ۲۵	۱۰	−۳۸ + ۲۰

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۰ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۵- & ۳ \\ ۴ & ۴- & ۹ & ۱۲- \\ ۵ & ۶- & ۴۱ & ۱۸- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۷ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۳ \\ ۴ & ۴- & ۱۱- & ۱۲- \\ ۵ & ۶- & ۱۰ & ۱۸- \end{vmatrix} =$$

پہلے کالم کے دوچند اور چوتھے کالم کے حاصل جمع کو دوسرے کالم میں سے وضع کرنے سے :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۵- & ۳ \\ ۴- & ۹ & ۱۲- \\ ۶- & ۴۱ & ۱۸- \end{vmatrix} ۳- \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۵- \\ ۴ & ۴- & ۹ \\ ۵ & ۶- & ۴۱ \end{vmatrix} ۲ =$$

$$(۳) \text{ ازروئے مثلہ } \begin{vmatrix} ۱۳ & ۱۲ \\ ۴۵ & ۱۷ \end{vmatrix} ۲ = \begin{vmatrix} ۱ & ۵- & ۱ \\ ۳- & ۹ & ۴- \\ ۶- & ۴۱ & ۶- \end{vmatrix} ۹- \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱۲ & ۴- & ۱۳ \\ ۱۲ & ۴- & ۴۵ \end{vmatrix} ۲ =$$

$$۶۳۸ = \begin{vmatrix} ۱ & ۲۱ \\ ۲۸ & ۱۷ \end{vmatrix} ۲ =$$

$$\begin{vmatrix} ۱۵ & ۵- & ۳ & ۱۵ \\ ۱۱ & ۰ & ۸ & ۱۴ \\ ۱۶ & ۱- & ۲۶ & ۲۷ \\ ۱۹ & ۲۸- & ۱۹- & ۷ \end{vmatrix} ۲ = \begin{vmatrix} ۱۵ & ۷ & ۱۲- & ۸ \\ ۱۱ & ۳ & ۳- & ۱۱ \\ ۱۶ & ۱۱- & ۱۰ & ۳۸ \\ ۱۹ & ۱۰ & ۳۸- & ۳- \end{vmatrix} ۳ = \text{ اور ق}$$

کالموں ۱ اور ۳، ۲ اور ۴، ۲ اور ۳ کو جمع کرنے سے

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۱۱ & ۱۴ & ۸ & ۲۶- \\ ۱۳ & ۲۴ & ۲۶ & ۱۰۳- \\ ۶۵- & ۷۷- & ۱۹- & ۱۰۲ \end{vmatrix} \frac{۲}{۳} = \begin{vmatrix} ۱۵ & ۱۵- & ۳ & ۱۵ \\ ۱۱ & ۰ & ۸ & ۱۴ \\ ۱۶ & ۳- & ۲۶ & ۲۷ \\ ۱۹ & ۸۴- & ۱۹- & ۷ \end{vmatrix} \frac{۲}{۳} =$$

کالم ۲ کے ۵ گنے کو کالم ۱ میں سے تفریق کرنے اور کالموں ۱ اور

۳ کو، اور ۳ اور ۴ کو جمع کرنے سے،

$$= -۲\begin{vmatrix} ۱۴ & ۱۱ & -۲۶ \\ ۲۴ & ۱۳ & -۱۰۳ \\ -۷۷ & -۶۵ & ۱۰۲ \end{vmatrix} = -۲\begin{vmatrix} ۳ & ۱۱ & -۱ \\ ۱۱ & ۱۳ & -۶۶ \\ -۱۲ & -۶۵ & -۴۰ \end{vmatrix}$$

$$= ۲\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱۱ & -۲۰ & ۶۶ \\ -۱۲ & -۲۹ & ۴۰ \end{vmatrix} = ۲\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ -۳۵ & -۱۵۲ & ۶۶ \\ -۲۳ & -۱۰۹ & ۴۰ \end{vmatrix}$$

$$= ۲\begin{vmatrix} ۳۵ & ۱۵۲ \\ ۲۳ & ۱۰۹ \end{vmatrix} = ۲\begin{vmatrix} ۳۵ & ۱۲ \\ ۲۳ & ۱۷ \end{vmatrix} = ۲\begin{vmatrix} -۱ & ۱۲ \\ -۲۸ & ۱۷ \end{vmatrix} = ۶۳۸$$

پس $لا = \frac{ق_۱}{ق} = ۱$

یہ قیمت پہلی، دوسری اور چوتھی مساواتوں میں درج کرنے سے، مساواتوں کا نظام:

$$-۱۲\,ا + ۷\,ی + ۱۵\,سہ + ۱۹ = ۰$$
$$-۳\,ا + ۳\,ی + ۱۱\,سہ + ۲۴ = ۰$$
$$-۳۸\,ا + ۱۰\,ی + ۱۹\,سہ - ۱ = ۰$$

ہو جاتا ہے جس کا حل یہ ہے:

$$\frac{-ا}{\begin{vmatrix} ۷ & ۱۵ & ۱۹ \\ ۳ & ۱۱ & ۲۴ \\ ۱۰ & ۱۹ & -۱ \end{vmatrix}} = \frac{ی}{\begin{vmatrix} ۱۵ & ۱۹ & -۱۲ \\ ۱۱ & ۲۴ & -۳ \\ ۱۹ & -۱ & -۳۸ \end{vmatrix}} = \frac{-سہ}{\begin{vmatrix} ۱۹ & -۱۲ & ۷ \\ ۲۴ & -۳ & ۳ \\ -۱ & -۳۸ & ۱۰ \end{vmatrix}} = \frac{۱}{\begin{vmatrix} -۱۲ & ۷ & ۱۵ \\ -۳ & ۳ & ۱۱ \\ -۳۸ & ۱۰ & ۱۹ \end{vmatrix}}$$

ان میں سے

$$\begin{vmatrix} ۷ & ۱۵ & ۱۹ \\ ۳ & ۱۱ & ۲۴ \\ ۱۰ & ۱۹ & -۱ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۷ & ۱ & ۴ \\ ۳ & ۵ & ۱۳ \\ ۱۰ & -۱ & -۲۰ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۷ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ & -۷ \\ ۱۰ & -۱ & -۱۶ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ -۳۲ & ۵ & -۷ \\ ۱۷ & ۱ & -۱۶ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -۳۲ & -۷ \\ ۱۷ & -۱۶ \end{vmatrix} = ۶۳۱$$

اسی طرح دوسرے مقطعات کو پھیلانے سے

$$\frac{۱}{-۶۳۱} = \frac{سہ}{۱۸۹۳} = \frac{-ی}{۱۲۶۲} = \frac{ما}{۶۳۱}$$

جس سے

$$ما = -۱ ، ی = ۲ ، سہ = -۳$$

یہ قیمتیں تیسری مساوات کے لیے بھی صادق آتی ہیں، پس مساواتوں کا مکمل حل عمل میں آ گیا ہے۔

۳۴۔ اسقاط — جب خطی متجانس مساواتوں کا ایک نظام غیر معلوم مقادیر کی تعداد سے زیادہ مساواتوں پر مشتمل ہوتا ہے تو عموماً یہ ممکن نہیں کہ غیر معلوم مقادیر کی قیمتیں دریافت کی جائیں جو ایک ساتھ (وقتِ واحد میں) اس نظام کے لیے صادق آئیں جب کہ تمام مساواتیں ایک دوسرے کے غیر تابع ہوتی ہیں۔

جب قیمتوں کا ایک مکمل جٹ ایک ساتھ (وقتِ واحد میں) ن غیر معلوم مقادیر کی (م + ن) مساواتوں کے نظام کے لیے فی الواقع صادق آتا ہے تو ان مساواتوں میں سے م مساواتیں غیر تابع نہیں ہوتی ہیں اور ایسا نظام باثبات (Consistent) کہلاتا ہے۔

فرض کرو

$$ا_۱ لا + ب_۱ ما + ج_۱ ی + د_۱ = ۰$$
$$ا_۲ لا + ب_۲ ما + ج_۲ ی + د_۲ = ۰$$
$$ا_۳ لا + ب_۳ ما + ج_۳ ی + د_۳ = ۰$$
$$ا_۴ لا + ب_۴ ما + ج_۴ ی + د_۴ = ۰$$

ایک باثبات نظام ہے۔ تب آخری تین مساواتوں سے

$$\frac{۱}{\begin{vmatrix} ا_۲ & ب_۲ & ج_۲ \\ ا_۳ & ب_۳ & ج_۳ \\ ا_۴ & ب_۴ & ج_۴ \end{vmatrix}} = \frac{-ی}{\begin{vmatrix} د_۲ & ا_۲ & ب_۲ \\ د_۳ & ا_۳ & ب_۳ \\ د_۴ & ا_۴ & ب_۴ \end{vmatrix}} = \frac{ما}{\begin{vmatrix} ج_۲ & د_۲ & ا_۲ \\ ج_۳ & د_۳ & ا_۳ \\ ج_۴ & د_۴ & ا_۴ \end{vmatrix}} = \frac{-لا}{\begin{vmatrix} د_۲ & ج_۲ & ب_۲ \\ د_۳ & ج_۳ & ب_۳ \\ د_۴ & ج_۴ & ب_۴ \end{vmatrix}}$$

لا، ما اور ی کی یہ قیمتیں پہلی مساوات میں درج کرنے اور سب کو مشترک نسب نما سے اس کی علامت تبدیل کرکے ضرب دینے سے

$$\text{ا}_1\begin{vmatrix}\text{ب}_2&\text{ج}_2&\text{د}_2\\ \text{ب}_3&\text{ج}_3&\text{د}_3\\ \text{ب}_4&\text{ج}_4&\text{د}_4\end{vmatrix}-\text{ب}_1\begin{vmatrix}\text{ج}_2&\text{د}_2&\text{ا}_2\\ \text{ج}_3&\text{د}_3&\text{ا}_3\\ \text{ج}_4&\text{د}_4&\text{ا}_4\end{vmatrix}+\text{ج}_1\begin{vmatrix}\text{د}_2&\text{ا}_2&\text{ب}_2\\ \text{د}_3&\text{ا}_3&\text{ب}_3\\ \text{د}_4&\text{ا}_4&\text{ب}_4\end{vmatrix}$$

$$-\text{د}_1\begin{vmatrix}\text{ا}_2&\text{ب}_2&\text{ج}_2\\ \text{ا}_3&\text{ب}_3&\text{ج}_3\\ \text{ا}_4&\text{ب}_4&\text{ج}_4\end{vmatrix}$$

یعنی

$$\begin{vmatrix}\text{ا}_1&\text{ب}_1&\text{ج}_1&\text{د}_1\\ \text{ا}_2&\text{ب}_2&\text{ج}_2&\text{د}_2\\ \text{ا}_3&\text{ب}_3&\text{ج}_3&\text{د}_3\\ \text{ا}_4&\text{ب}_4&\text{ج}_4&\text{د}_4\end{vmatrix}=0 \qquad (۵)$$

یہ اس امر کی شرط ہے کہ نظام باثبات ہو:

پس ن غیر معلوم مقادیر میں (ن + ۱) متجانس خطی مساواتوں کا نظام باثبات ہوتا ہے جبکہ سروں کا مقطعہ صفر ہوتا ہے۔

شرط (۵) کو دیے ہوئے نظام میں لا، ما اور ی کا حاصل اسقاط (Eliminant) بھی کہتے ہیں۔

مثال (۷)۔ ذیل کی تین مساواتوں

$$\text{ا}_1\,\text{لا}+\text{ب}_1\,\text{ما}+\text{ج}_1\,\text{ی}=0$$
$$\text{ا}_2\,\text{لا}+\text{ب}_2\,\text{ما}+\text{ج}_2\,\text{ی}=0$$
$$\text{ا}_3\,\text{لا}+\text{ب}_3\,\text{ما}+\text{ج}_3\,\text{ی}=0$$

کے باثبات ہونے کی شرط کو ایک مقطعہ کی شکل میں ظاہر کرو۔

اگر $\dfrac{5\,\text{لا}-2\,\text{لا}}{\text{لا}}=\dfrac{5\,\text{ما}+\text{ی}}{\text{ما}}=\dfrac{-2\,\text{لا}+\text{ما}+\text{ی}}{\text{ی}}=\text{م}$

تو ایک مساوات حاصل کرو جس سے م دریافت ہوجائے۔
اِس مساوات کو حل کرو اور متعدد حلوں کے متناظر لا، ما اور ی کی باہمی نسبتیں دریافت کرو۔
[جامعہ لندن]

دی ہوئی مساوات ٹھیک اس شکل میں نہیں ہے جو فصل (۳۲) میں دی گئی ہے۔ لیکن اگر غیر معلوم مقادیر کو لا، ما اور ی کی نسبتیں تصور کیا جائے، جو ہر ایک مساوات کو بالترتیب لا، ما، ی میں سے کسی ایک پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوں تو وہ فوراً فصل (۳۲) والی شکل میں منتقل ہوجاتی ہے۔ چنانچہ فرض کرو کہ

ع = لا/ی اور و = ما/ی

تب یہ فرض کرکے کہ ی کی قیمت صفر نہیں ہے۔ نظام

ل۱ ع + ب۱ و + ج۱ = ۰
ل۲ ع + ب۲ و + ج۲ = ۰
ل۳ ع + ب۳ و + ج۳ = ۰

ہوجاتا ہے۔ پس (۵) کی رُو سے اِس نظام کے باثبات ہونے کی شرط یہ ہوتی ہے:-

| ل۱ ب۱ ج۱ |
| ل۲ ب۲ ج۲ | = ۰
| ل۳ ب۳ ج۳ |

یہ دیے ہوئے نظام میں لا، ما، ی کا حاصل اسقاط ہے۔
دوسرے نظام میں کسور کو صاف کرو اور لا، ما، ی کو ع اور و میں مثل سابق تبدیل کرو۔ تب

(۵ - ۶) ع - ۲ = ۰
(۵ - م) و + ۱ = ۰
- ۲ ع + و + ۱ - م = ۰

پس اگر یہ مساواتیں باثبات ہیں تو

| ۵-م   ۰   -۲ |
| ۰   ۵-م   ۱ | = ۰
| -۲   ۱   ۱-م |

جو پھیلانے پر

م (۵ - م) (م - ۶) = ۰ دیتا ہے۔

∴ م = ۰، ۵ یا ۶

مساواتوں کو م کی اُن قیمتوں کے ساتھ حل کرنے سے

(i) م = ۰، ع = لا/ی = ۰.۴، و = ما/ی = -۰.۲

اور لا/ما = ع/و = -۲

(ii) م = ۵، ع = ∞ و = ∞

اس سے ظاہر ہے ی = ۰.

لا/ما دریافت کرنے کے لیے مساوات -۲ لا + ما + (۱-م) ی = ۰ کو ما پر تقسیم کرو۔ تب چونکہ ی = ۰. لا/ما = ۰.۵

(iii) م = ۶، ع = -۲، و = ۱ اور لا/ما = -۲

مثال (۸) عہ کی ایسی قیمتیں دریافت کرو کہ نظام ۲ لا + ی = ۴، ۴ لا - عہ ما = ۲۰، ۵ لا + ما + ۲ ی = ۷، ۱۴۴ لا + ۱۲۸ ما + عہ ی + ۹۶ = ۰ باثبات ہو۔

دی ہوئی مساواتوں کو معیاری شکل میں لکھنے سے

۲ لا + ی - ۴ = ۰

۴ لا - عہ ما - ۲۰ = ۰

۵ لا + ما + ۲ ی - ۷ = ۰

۱۴۴ لا + ۱۲۸ ما + عہ ی - ۹۶ = ۰

باثباتی کے لیے شرط ہے کہ ق = ۰ جس میں

ق = | ۲ ۰ ۱ -۴ | ۴ -ع ۰ -۲۰ | ۵ ۱ ۲ -۷ | ۱۴۴ ۱۲۸ ع ۹۶ | = | ۰ ۰ ۱ ۰ | ۴ -ع ۰ -۱۲ | ۱ ۱ ۲ ۳ | ۱۴۴-۲ع ۱۲۸ ع ۳۸۴ |

= | -۱۲ ۴ -ع | ۳ ۱ ۱ | ۳۸۴ ۱۴۴-۲ع ۱۲۸ | = ۳ | -۴ ۴ -ع | ۱ ۱ ۱ | ۱۲۸ ۱۴۴-۲ع ۱۲۸ |

= ۳ | ع-۴ ۴ -ع | ۰ ۱ ۱ | ۰ ۱۴۴-۲ع ۱۲۸ | = ۳(ع-۴) | ۱ ۱۴۴-۲ع | ۱ ۱۲۸ |

= ۶ (ع - ۴) (ع - ۸).

پس جب ق = ۰، ع = ۴ یا ۸

یہ ملاحظہ ہو کہ ان میں سے ایک شرط غیر تابع نہیں ہے - کیونکہ وہ دوسروں سے مشتق ہوتی ہے جبکہ ع ابھی ابھی معین کی ہوئی دو قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت رکھتا ہے - چنانچہ ع = ۸ لیں اور پہلی اور دوسری مساواتوں کو - ۳۱ اور ۱۶ سے علی الترتیب ضرب دیں اور جمع کریں تو حاصل مساوات

۱۸ لا + ۱۶ ما + ی = - ۱۲

ہوتی ہے - یہ چوتھی مساوات ہے ع کی قیمت درج کرنے اور ایک سرے سے لے کر دوسرے سرے تک تمام کو ۸ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے -

باب (۳) کی مثالیں

مندرجۂ ذیل مقطعات کی قیمتیں دریافت کرو :-

(۱) | ۱ ۴ ۲۷ | ۲ ۹ ۶۴ | ۳ ۱۶ ۱۲۵ |

(۲) | ۳۱ ۹۱ ۴۷ | ۱۴ ۲۹ ۳۰ | ۲۱ ۳۶ ۳۷ |

(۳)

۱۱	-۳	۳۷
۳	۲	۱۶
-۲	۳	۵

(۴)

۰	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱

(۵)

گ	ح	و
ف	ب	ح
ج	ف	گ

(۶)

ج۱	ب۱	ل۱	۰
ج۲	ب۲	ل۲	۰
۰	ج۱	ب۱	ل۳
۰	ج۳	ب۳	ل۳

ثابت کرو کہ

(۷)

ی	ما	لا
ی²	ما²	لا²
ی³	ما³	لا³

= لا ما ی

۱	۱	۱
ی	ما	لا
ی²	ما²	لا²

(۸)

۰	۰	ب۱	ل۱
۰	۰	ب۲	ل۲
د۱	ج۱	۰	۰
د۲	ج۲	۰	۰

=

ب۱	ل۱
ب۲	ل۲

×

د۱	ج۱
د۲	ج۲

(۹)

۵	-۳	۴	۱
-۱	-۸	۹	۰
۲	۴	-۳	۲
۴	۳	۱	۵

=

۱	۲	۰	۵
۴	-۳	-۶	۱
-۳	۴	۸	۳
۵	۲	۱	۴

مقطعات کے ذریعہ ذیل کی مساواتوں کو حل کرو:۔

(۱۰) ۷ لا − ۳ ما + ۵ ی = ۲۱

۲ لا + ۵ ما − ی = ۱۲

لا + ۶ ما + ۳ ی = ۲

(۱۱) لا + ما + ی = ۱ (۱۲) ۲لا$_{1}$ − ۳لا$_{2}$ + ۲لا$_{3}$ − ۳لا$_{4}$ = ۰

۱۱لا + ۱۲ما − ۷ی = ۱۱ ۴لا$_{1}$ + ۵لا$_{2}$ + ۴لا$_{3}$ − ۶لا$_{4}$ = ۰

۳۷لا + ۴۰ما + ۴۲ی = ۳۸ ۳لا$_{1}$ − ۷لا$_{2}$ + ۲لا$_{3}$ + ۱۳لا$_{4}$ = ۰

(۱۳) ثابت کرو کہ اگر مساواتیں الا^{2} + ب لا + ج = ۰ اور پ لا^{2} + ق لا + ر = ۰ ایک مشترک اصل رکھتی ہیں، تو

$$\begin{vmatrix} \text{ج} & \text{ا} \\ \text{ر} & \text{پ} \end{vmatrix}^{2} = \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ق} & \text{ر} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{پ} & \text{ق} \end{vmatrix}$$

(۱۴) ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{ا + ب} & \text{ب + ج} & \text{ج + ا} \\ \text{ب + ج} & \text{ج + ا} & \text{ا + ب} \\ \text{ج + ا} & \text{ا + ب} & \text{ب + ج} \end{vmatrix} = ۲ \begin{vmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{ا} \\ \text{ج} & \text{ا} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

(۱۵) اگر خ = $\sqrt{-1}$ تو ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{۲ + ۳خ} & \text{۴ + ۵خ} \\ \text{−۴ + ۵خ} & \text{۲ − ۳خ} \end{vmatrix} = ۲^{2} + ۳^{2} + ۴^{2} + ۵^{2}$$

اور ۱^{2} + ۳^{2} + ۵^{2} + ۷^{2} کو بطور ایک مقطعہ کے ظاہر کرو۔ اسی طرح پر ثابت کرو کہ

$$(۲^{2} + ۳^{2} + ۴^{2} + ۵^{2})(۱^{2} + ۳^{2} + ۵^{2} + ۷^{2}) = ۸^{2} + ۱۲^{2} + ۲۲^{2} + ۶۲^{2}$$

(۱۶) ثابت کرو کہ

$$\begin{vmatrix} \text{جب}^{2}\text{عہ} & \text{جب عہ جم عہ} & \text{جم}^{2}\text{عہ} \\ \text{جب}^{2}\text{بہ} & \text{جب بہ جم بہ} & \text{جم}^{2}\text{بہ} \\ \text{جب}^{2}\text{جہ} & \text{جب جہ جم جہ} & \text{جم}^{2}\text{جہ} \end{vmatrix}$$

= جب (عہ − بہ) جب (عہ − بہ) جب (بہ − جہ)

(۱۷) دریافت کرو کہ عہ کی کس قیمت یا کن قیمتوں کے لیے ذیل کی مساواتیں موافق اور درست ہونگی۔ ایسی صورت میں ان کو حل کرو۔

$$\text{لا}^2 + ۲\,\text{ما} - \text{لا} = ۱۱\,\text{عہ}$$
$$۳\,\text{لا}^2 + \text{ما} + \text{لا} = ۱۲\,\text{عہ}$$
$$۲\,\text{لا}^2 - \text{ما} + \text{لا} = ۰$$

(۱۸) ثابت کرو کہ اگر

$$\text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ب}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1 = ۰$$
$$\text{ا}_2\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2 = ۰$$
$$\text{ا}_3\,\text{لا} + \text{ب}_3\,\text{ما} + \text{ج}_3 = ۰$$

کا ایک مشترک حل ہے تو ہمیشہ ایسے تین عدد ل، ک، م دریافت ہو سکتے ہیں کہ

$$\text{ا}_1\,\text{ل} + \text{ا}_2\,\text{ک} + \text{ا}_3\,\text{م} = ۰$$
$$\text{ب}_1\,\text{ل} + \text{ب}_2\,\text{ک} + \text{ب}_3\,\text{م} = ۰$$
$$\text{ج}_1\,\text{ل} + \text{ج}_2\,\text{ک} + \text{ج}_3\,\text{م} = ۰$$

چوتھا باب

مسئلہ قوت نما۔ لوکارتھم اور لوکارتمی سلسلہ

٣٢۔ مسئلہ قوت نما۔ اگر $\frac{١}{\text{ن}}$ عدداً اکائی سے کم ہو تو $\left(١+\frac{١}{\text{ن}}\right)^{\text{ن لا}}$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا سکتے ہیں۔ اور

$$\left(١+\frac{١}{\text{ن}}\right)^{\text{ن لا}} = ١ + \text{ن لا}\,\frac{١}{\text{ن}} + \frac{\text{ن لا}(\text{ن لا}-١)}{٢\times١}\,\frac{١}{\text{ن}^٢} + \frac{\text{ن لا}(\text{ن لا}-١)(\text{ن لا}-٢)}{٣\times٢\times١}\,\frac{١}{\text{ن}^٣} + \cdots + \frac{\text{ن لا}(\text{ن لا}-١)\cdots(\text{ن لا}-\text{ر}+١)}{\text{ر}\times\cdots\times٣\times٢\times١}\cdot\frac{١}{\text{ن}^{\text{ر}}} + \cdots$$

ہم اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں :-

$$\left(١+\frac{١}{\text{ن}}\right)^{\text{ن لا}} = ١ + \text{لا} + \frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{١}{\text{ن}}\right)}{\underline{|٢}} + \frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{١}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}-\frac{٢}{\text{ن}}\right)}{\underline{|٣}} + \cdots + \frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{١}{\text{ن}}\right)\cdots\left(\text{لا}-\frac{\text{ر}-١}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{ر}}} + \cdots$$

لا = ١ لکھنے سے

$$\left(١+\frac{١}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = ١ + ١ + \frac{١-\frac{١}{\text{ن}}}{\underline{|٢}} + \frac{\left(١-\frac{١}{\text{ن}}\right)\left(١-\frac{٢}{\text{ن}}\right)}{\underline{|٣}} + \cdots + \frac{\left(١-\frac{١}{\text{ن}}\right)\cdots\left(١-\frac{\text{ر}-١}{\text{ن}}\right)}{\underline{|\text{ر}}} + \cdots$$

لیکن $\left(١+\frac{١}{\text{ن}}\right)^{\text{ن لا}} = \left\{\left(١+\frac{١}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}\right\}^{\text{لا}}$ ۔ پس

$$١ + \text{لا} + \frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{١}{\text{ن}}\right)}{\underline{|٢}} + \frac{\text{لا}\left(\text{لا}-\frac{١}{\text{ن}}\right)\left(\text{لا}-\frac{٢}{\text{ن}}\right)}{\underline{|٣}} + \cdots\cdots$$

$$= \left\{ ۱ + ۱ + \frac{۱ - \frac{۱}{\text{ن}}}{\lfloor ۲} + \frac{(۱ - \frac{۱}{\text{ن}})(۱ - \frac{۲}{\text{ن}})}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots \right\}^{\text{لا}}$$

مصرحۂ بالا تعلق ن کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہے خواہ وہ کتنی ہی بڑی کیوں نہ ہوں، اور اس لیے اس صورت میں بھی صحیح ہے جب کہ ن $= \infty$ لیکن جب ن $= \infty$ تو $\frac{۱}{\text{ن}} =$ صفر اور تعلق مذکور ذیل کی صورت اختیار کرتا ہے۔ *

$$۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲} + \ldots\ldots + \frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\lfloor \text{ر}} + \ldots\ldots = \left(۱ + ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \ldots\ldots + \frac{۱}{\lfloor \text{ر}} + \ldots\ldots \right)^{\text{لا}}$$

اگر ہم سلسلہ $۱ + ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \ldots\ldots + \frac{۱}{\lfloor \text{ر}} + \ldots\ldots$ کو تو سے تعبیر کریں تو مسئلہ قوت نما ظاہر ہوتا ہے، یعنی

$$\text{تو}^{\text{لا}} = ۱ + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲} + \ldots + \frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\lfloor \text{ر}} + \ldots\ldots$$

یہاں یہ بیان کر دیا جاتا ہے کہ $\text{تو}^{\text{لا}}$ کا مندرجہ بالا سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے۔

۴۳۔ مقدار تو کو ریاضی میں بڑی اہمیت حاصل ہے۔ یہ امر واضح ہے کہ تو باعتبارِ قیمت ۲ سے بڑا ہے اور وہ صریحاً $۱ + ۱ + ۲^{-۱} + ۲^{-۲} + ۲^{-۳} + \ldots\ldots$ سے اور اس لیے ۳ سے چھوٹا ہے۔ حسابی عمل سے اس کی قیمت ۲٫۷۱۸۲۸..... بر آمد ہوتی ہے۔

* اس بارے میں زیادہ احتیاط کے ساتھ امتحان کرنے کی ضرورت ہے، نہ صرف ہر رقم کی نہایت معلوم کرنے کے لیے بلکہ اس وجہ سے بھی کہ کسی حاصلِ جمع کی نہایت، ضرور نہیں کہ اس کی رقموں کی نہایتوں کے حاصلِ جمع کے مساوی ہو، اِلّا اس صورت میں کہ اس کی رقموں کی تعداد متناہی ہو۔ اس موقع پر یہ امتحان متروک کر دیا گیا ہے اِس لیے کہ مابعد کی فصل (۳۵) میں جو تحقیق عمل میں لائی گئی ہے اس سے زیادہ مرجّح ہے۔

قو کے غیر متبائن ہونے کا ثبوت ۔ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ $\text{قو} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ جس میں م اور ن دونوں صحیح عدد ہیں پس چاہیے کہ

$$\frac{\text{م}}{\text{ن}} = ۱ + \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \cdots + \frac{۱}{\underline{|\text{ن}}} + \frac{۱}{\underline{|\text{ن}+۱}} + \frac{۱}{\underline{|\text{ن}+۲}} + \frac{۱}{\underline{|\text{ن}+۳}} + \cdots$$

دونوں جانب $\underline{|\text{ن}}$ سے ضرب دو۔ تب سلسلہ کی تمام رقمیں صحیح عدد بن جائینگی باستثناء

$$\frac{۱}{(\text{ن}+۱)} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)(\text{ن}+۳)} + \cdots$$

پس ہمارے مفروضہ کے بموجب

$$\frac{۱}{(\text{ن}+۱)} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)(\text{ن}+۲)(\text{ن}+۳)} + \cdots$$

ایک صحیح عدد ہونا چاہیے۔ لیکن یہ حاصل جمع

$$\frac{۱}{(\text{ن}+۱)} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)^۲} + \frac{۱}{(\text{ن}+۱)^۳} + \cdots$$

سے چھوٹا ہے اور اس لیے

$\dfrac{\frac{۱}{\text{ن}+۱}}{\left(۱ - \frac{۱}{\text{ن}+۱}\right)}$ یعنی $\frac{۱}{\text{ن}}$ سے چھوٹا ہے۔ پس اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ مقدار قو، متوافق عدد $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ کے مساوی نہیں ہو سکتی۔

۳۵۔ مسئلہ قوت نما کی بابت کوشی (Cauchy)

کا ثبوت ۔ (مسئلہ ثنائی کو صرف مثبت صحیح قوت نما کی حد تک درست مان کر)

فرض کرو کہ ف(م) سلسلہ $۱ + \text{م} + \frac{\text{م}^۲}{\underline{|۲}} + \frac{\text{م}^۳}{\underline{|۳}} + \cdots + \frac{\text{م}^\text{ر}}{\underline{|\text{ر}}} + \cdots$ کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\text{پس } ف(م) \equiv ۱ + م + \frac{م^{۲}}{|\underline{۲}} + \frac{م^{۳}}{|\underline{۳}} + \cdots\cdots + \frac{م^{ر}}{|\underline{ر}} + \cdots\cdots$$

$$ف(ن) \equiv ۱ + ن + \frac{ن^{۲}}{|\underline{۲}} + \frac{ن^{۳}}{|\underline{۳}} + \cdots\cdots + \frac{ن^{س}}{|\underline{س}} + \cdots\cdots$$

$$\text{اور } ف(م+ن) \equiv ۱ + (م+ن) + \frac{(م+ن)^{۲}}{|\underline{۲}} + \cdots\cdots + \frac{(م+ن)^{پ}}{|\underline{پ}} + \cdots\cdots$$

اب، $ف(م) \times ف(ن)$ میں $م^{ر} ن^{س}$ کا سر ہے $\frac{۱}{|\underline{ر}\ |\underline{س}}$، اور $ف(م+ن)$ میں رقم $م^{ر} ن^{س}$

صرف $\frac{(م+ن)^{ر+س}}{|\underline{ر+س}}$ ہی میں واقع ہو سکتی ہے اور اس لیے اس کا سر $\frac{|\underline{ر+س}}{|\underline{ر}\ |\underline{س}} \cdot \frac{۱}{|\underline{ر+س}}$

یعنی $\frac{۱}{|\underline{ر}\ |\underline{س}}$ ہوگا۔

پس چونکہ سلسلے $ف(م)$، $ف(ن)$ اور $ف(م+ن)$، م اور ن کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہیں اور کسی رقم $م^{ر} ن^{س}$ کا سر $ف(م) \times ف(ن)$ میں وہی ہے جو $ف(م+ن)$ میں ہے

لہذا اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ

$$ف(م) \times ف(ن) = ف(م+ن) \quad \cdots\cdots \quad (۱)$$

م اور ن کی تمام قیمتوں کے لیے۔

اب فرض کرو کہ لا ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ تب (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$ف(۱) \times ف(۱) \times ف(۱) \times \cdots\cdots\cdots\cdots$ لا اجزائے ضربی تک

$= ف(۱ + ۱ + ۱ + \cdots\cdots$ لا رقموں تک$)$

$$\therefore \{ف(۱)\}^{لا} = ف(لا) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (۲)$$

اب فرض کرو کہ لا ایک مثبت کسر $\frac{پ}{ق}$ ہے جس میں پ اور ق مثبت صحیح اعداد ہیں۔ تب (۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\left\{\text{ف}\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\right)\right\}^{\text{ق}} = \text{ف}\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}} + \frac{\text{پ}}{\text{ق}} + \frac{\text{پ}}{\text{ق}} + \text{.....ق رقموں تک}\right) = \text{ف}(\text{پ})$$

$$= \{\text{ف}(۱)\}^{\text{پ}} \quad \text{از روئے (۲)}$$

$$\therefore \text{ف}\left(\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\right) = \{\text{ف}(۱)\}^{\frac{\text{پ}}{\text{ق}}}$$

لہذا لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے $\{\text{ف}(۱)\}^{\text{لا}} = \text{ف}(\text{لا})$

آخر میں فرض کرو کہ لا منفی ہے اور - ما کے مساوی ہے پس ما خود مثبت ہے۔ تب $\text{ف}(-\text{ما}) \times \text{ف}(\text{ما}) = \text{ف}(۰)$ از روئے (۱) لیکن ف = ۱ اس لیے

$$\text{ف}(-\text{ما}) = \frac{۱}{\text{ف}(\text{ما})}$$

پس $\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(-\text{ما}) = \frac{۱}{\text{ف}(\text{ما})} = \frac{۱}{\{\text{ف}(۱)\}^{\text{ما}}}$ اس لیے کہ ما مثبت ہے۔

$$= \{\text{ف}(۱)\}^{-\text{ما}} = \{\text{ف}(۱)\}^{\text{لا}}$$

پس لا خواہ کچھ ہی ہو $\{\text{ف}(۱)\}^{\text{لا}} = \text{ف}(\text{لا})$

لیکن $\text{ف}(۱) = ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۱} + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \cdots\cdots \equiv \text{و}$

$$\therefore \text{و}^{\text{لا}} = \text{ف}(\text{لا}) = ۱ + \frac{\text{لا}}{\lfloor ۱} + \frac{\text{لا}^۲}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^۳}{\lfloor ۳} + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\lfloor \text{ر}} + \cdots\cdots$$

۳۵۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ن}^{\text{ن}} - \text{ن}(\text{ن}-۱)^{\text{ن}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}+۱)}{\lfloor ۲}(\text{ن}-۲)^{\text{ن}} - \cdots\cdots = \lfloor \text{ن}$$

سابقہ فصل سے $(\text{و}^{\text{لا}} - ۱)^{\text{ن}} = \left(\text{لا} + \frac{\text{لا}^۲}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^۳}{\lfloor ۳} + \cdots\right)^{\text{ن}}$

اور مسئلہ ثنائی سے $(\text{و}^{\text{لا}} - ۱)^{\text{ن}} = \text{و}^{\text{ن لا}} - \text{ن}\,\text{و}^{(\text{ن}-۱)\text{لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\lfloor ۲}\text{و}^{(\text{ن}-۲)\text{لا}} - \cdots\cdots$

اب $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر $\left(\text{لا} + \frac{\text{لا}^۲}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^۳}{\lfloor ۳} + \cdots\right)^{\text{ن}}$ میں صفر ہے اگر ن سے ر کم ہے

اور ا ہے اگر ر = ن

اور $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر $\text{و}^{\text{ن لا}} - \text{ن}\,\text{و}^{(\text{ن}-۱)\text{لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲!}\,\text{و}^{(\text{ن}-۲)\text{لا}} \ldots\ldots$ ہے

$$\frac{۱}{\text{ر}!}\left\{\text{ن}^{\text{ر}} - \text{ن}(\text{ن}-۱)^{\text{ر}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲!}(\text{ن}-۲)^{\text{ر}} - \ldots\ldots\right\}$$

پس $(\text{و}^{\text{لا}}-۱)^{\text{ن}}$ کے دونوں جملوں کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے سروں کو باہم دیگر مساوی لکھنے سے

$$\frac{۱}{\text{ن}!}\left\{\text{ن}^{\text{ن}} - \text{ن}(\text{ن}-۱)^{\text{ن}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲!}(\text{ن}-۲)^{\text{ن}} \ldots\ldots\right\} = ۱$$

اس مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر عمومیت دی جاسکتی ہے:

چونکہ $(\text{و}^{\text{ا لا}} - \text{و}^{\text{ب لا}})^{\text{ن}} = \text{و}^{\text{ن ا لا}} - \text{ن}\,\text{و}^{(\overline{\text{ن}-۱}\times\text{ا}+\text{ب})\text{لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲!}\,\text{و}^{(\overline{\text{ن}-۲}\times\text{ا}+۲\text{ب})\text{لا}} \ldots\ldots\ldots$

اور $(\text{و}^{\text{ا لا}} - \text{و}^{\text{ب لا}})^{\text{ن}} = \text{و}^{\text{ن ب لا}}\left\{\text{و}^{(\text{ا}-\text{ب})\text{لا}} - ۱\right\}^{\text{ن}}$

$$= \text{و}^{\text{ن ب لا}}\left\{(\text{ا}-\text{ب})\text{لا} + \frac{(\text{ا}-\text{ب})^۲\text{لا}^۲}{۲!} + \ldots\right\}^{\text{ن}}$$

پس $(\text{و}^{\text{ا لا}} - \text{و}^{\text{ب لا}})^{\text{ن}}$ کے لیے دو جملے جو لکھے گئے ہیں ان میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے سروں کو باہم دیگر مساوی لکھنے سے

$$\frac{۱}{\text{ن}!}\left\{(\text{ن ا})^{\text{ن}} - \text{ن}(\overline{\text{ن}-۱}\times\text{ا}+\text{ب})^{\text{ن}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲!}(\overline{\text{ن}-۲}\times\text{ا}+۲\text{ب})^{\text{ن}} - \ldots\right\} = (\text{ا}-\text{ب})^{\text{ن}}$$

اگر ہم ن ا = لا لکھیں اور ب - ا = ما، تو آخر الذکر نتیجہ ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے:

$$\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ن}(\text{لا}+\text{ما})^{\text{ن}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲!}(\text{لا}+۲\text{ما})^{\text{ن}} - \ldots\ldots = (-۱)^{\text{ن}}\cdot\text{ما}^{\text{ن}}\;\text{ن}!$$

مثلاً اگر ک کوئی مثبت صحیح عدد ن سے کم ہو تو

$$\text{لا}^{\text{ک}} - \text{ن}\,(\text{لا}+\text{ما})^{\text{ک}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,(\text{لا}+۲\,\text{ما})^{\text{ک}} - \ldots\ldots \text{ ن}+۱ \text{ رقموں تک } = ۰$$

مندرجۂ ذیل خاص صورتیں اہمیت رکھتی ہیں، یہہ فرض کیا جاتا ہے کہ ک، ن سے کم ہے ۔

$$۱^{\text{ک}} - \text{ن}\,۲^{\text{ک}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,۳^{\text{ک}} - \ldots\ldots \text{ ن} + ۱ \text{ رقموں تک } = ۰$$

اور

$$\text{م}^{\text{ک}} - \text{ن}(\text{م}-۱)^{\text{ک}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,(\text{م}-۲)^{\text{ک}} - \ldots\ldots \text{ن}+۱ \text{ رقموں تک } = ۰$$

مشق ۴ (ا)

(۱) جب ن لاتناہی ہو تو ثابت کرو کہ $\left(۱ + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہا $\text{و}^{\text{لا}}$ ہے

(۲) جب ن لاتناہی ہو تو بتاؤ کہ $\left(۱ + \frac{\text{ل}}{\text{ن}}\right)^{\frac{\text{ن}}{\text{ب}}}$ کی انتہا $\text{و}^{\frac{\text{ل}}{\text{ب}}}$ ہے

(۳) ثابت کرو کہ $\text{ن}^{\text{ن}+۱} - \text{ن}\,(\text{ن}-۱)^{\text{ن}+۱} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,(\text{ن}-۲)^{\text{ن}+۱} - \ldots\ldots = \frac{۱}{۲}\,\text{ن}\,\underline{|\text{ن}+۱}$

(۴) بتاؤ کہ $\left(۱ + \frac{۱}{\underline{|۱}} + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \ldots\right)\left(۱ - \frac{۱}{\underline{|۱}} + \frac{۱}{\underline{|۲}} - \frac{۱}{\underline{|۳}} + \ldots\right) = ۱$

(۵) ثابت کرو کہ $\text{و}^{-۱} = \frac{۲}{\underline{|۳}} + \frac{۴}{\underline{|۵}} + \frac{۶}{\underline{|۷}} + \ldots\ldots$

(۶) بتاؤ کہ $\left(۱ + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۴}} + \frac{۱}{\underline{|۶}} + \ldots\right)^{۲} = ۱ + \left(۱ + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \frac{۱}{\underline{|۵}} + \frac{۱}{\underline{|۷}} + \ldots\ldots\right)^{۲}$

(۷) بتاؤ کہ $\frac{\text{و}-۱}{\text{و}+۱} = \left\{\frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۴}} + \frac{۱}{\underline{|۶}} + \ldots\right\} \div \left\{\frac{۱}{\underline{|۱}} + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \frac{۱}{\underline{|۵}} + \ldots\right\}$

لوکارتھم

۳۶ ۔ ایک عدد کے مساوی بنانے کے لیے کسی دوسرے عدد کو جس قوت تک بلند کرنا چاہیئے اُس کے قوت نما کو پہلے عدد کا لوکارتھم کہتے ہیں بلحاظ دوسرے عدد کے جو کہ اس لوکارتھم کا اساس کہلاتا ہے۔ مثلاً اگر $\text{ا}^{\text{لا}} = \text{ما}$ تو لا، ما کا لوکارتھم باساس ا کہلاتا ہے اور اس امر کا اظہار بطریق کتابت

لا = لوکر ما سے ہوتا ہے۔

ہم اب لوکارتموں کے چند اساسی خواص بیان کرینگے اور ان کے دریافت کرنے کے طریقے اور اُن کے ذریعہ بعض تقریبی حسابات کا مختصر عمل بتائینگے۔

لوکارتموں کے خواص سے طالب علم کو یقیناً انٹرمیڈیئیٹ کے نصاب علم مثلث کی تکمیل میں اچھی واقفیت ہوگئی ہوگی۔ سہولت کی خاطر یہ خواص یہاں بیان کردیے جاتے ہیں:

(۱) اساس خواہ کچھ ہی ہو ا کا لوکارتم صفر ہے۔

(۲) کسی حاصلِ ضرب کا لوکارتم اس کے اجزائے ضربی کے لوکارتموں کا حاصل جمع ہے۔

مثلاً لوکر (لا ما ی.....) = لوکر لا + لوکر ما + لوکر ی + ...

(۳) کسی خارج قسمت کا لوکارتم مقسوم اور مقسوم علیہ کے لوکارتموں کا جبری تفاوت ہے۔

مثلاً لوکر (لا/ما) = لوکر لا - لوکر ما

(۴) کسی عدد کی کسی قوت کا لوکارتم اُس عدد کے لوکارتم اور اُس قوت کے قوت نما کا حاصلِ ضرب ہے۔

مثلاً لوکر لاⁿ = ن لوکر لا

(۵) کسی عدد کا لوکارتم باساس ا اگر معلوم ہو تو اس کا لوکارتم باساس ب، معلومہ لوکارتم کو مستقل لوکب ا کے ساتھ ضرب دینے سے معلوم ہوجاتا ہے۔

مثلاً لوکب لا = لوکا لا × لوکب ا اور لوکب ا × لوکا ب = ۱

۳۷۔ لوکارتمی سلسلہ۔ فرض کرو کہ ا = وک

پس ک = لوکو ا۔ تب

ا^لا = و^لاک = و^(لا لوکو ا)۔ پس

$$ا^{لا} = و^{لا\,لوک_و\,ا} = ۱ + لا\,لوک_و\,ا + \frac{(لا\,لوک_و\,ا)^۲}{\lfloor ۲} + \dots + \frac{(لا\,لوک_و\,ا)^ر}{\lfloor ر} + \dots$$

ا = ۱ + ما لکھو۔ تب

$$(۱+ما)^{لا} = ۱ + لا\,لوک_و(۱+ما) + \frac{۱}{\lfloor ۲}\{لا\,لوک_و(۱+ما)\}^۲ + \dots$$

اب، بشرطیکہ ما عدداً اکائی سے کم ہو، $(۱ + ما)^{لا}$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا سکتے ہیں۔ تب

$$۱ + لا\,ما + \frac{لا(لا-۱)}{\lfloor ۲}ما^۲ + \dots + \frac{لا(لا-۱)(لا-۲)\dots(لا-ر+۱)}{\lfloor ر}ما^ر + \dots$$

$$= ۱ + لا\,لوک_و(۱+ما) + \frac{۱}{\lfloor ۲}\{لا\,لوک_و(۱+ما)\}^۲ + \dots$$

بائیں جانب کا سلسلہ، لا اور ما کی سب قیمتوں کے لیے مستدق ہے، اور سیدھے جانب کا سلسلہ، لا کی سب قیمتوں کے لیے مستدق ہے، بشرطیکہ ما کی قیمت عدداً اکائی سے کم ہو۔ پس ما کی ایسی قیمتوں کے لیے ہم مساوات کے دونوں جانب کے لا کے سروں کو باہم دیگر مساوی لکھ سکتے ہیں۔ اس طرح ہمیں حاصل ہوتی ہے مساوات

$$لوک_و(۱+ما) = ما - \frac{ما^۲}{۲} + \frac{ما^۳}{۳} - \dots + (-۱)^{ر-۱}\frac{ما^ر}{ر} + \dots$$

یہ لوکارتمی سلسلہ کہلاتا ہے۔

۴۸۔ کسی عدد کے لوکارتم کی تقریبی قیمت معلوم کرنے میں جو مشقت اُٹھانی ہوتی ہے اُس کو گھٹانے کے لیے اساسی لوکارتمی سلسلہ سے، اس سے زیادہ سرعت کے مستدق سلسلے حاصل کیے جاتے ہیں۔

لوکارتمی سلسلہ $لوک_و(۱+ما) = ما - \frac{ما^۲}{۲} + \frac{ما^۳}{۳} - \frac{ما^۴}{۴} + \dots \quad (۱)$

میں ما کی علامت کو تبدیل کرنے سے، سلسلہ

$$لوک_و(۱-ما) = -ما - \frac{ما^۲}{۲} - \frac{ما^۳}{۳} - \frac{ما^۴}{۴} - \dots \quad (۲)$$

برآمد ہوتا ہے

$$\text{پس لوک}_{\text{و}}\frac{۱+\text{ما}}{۱-\text{ما}} = \text{لوک}_{\text{و}}(۱+\text{ما}) - \text{لوک}_{\text{و}}(۱-\text{ما})$$

$$= ۲\left(\text{ما} + \frac{\text{ما}^{۳}}{۳} + \frac{\text{ما}^{۵}}{۵} + \cdots\cdots\right)\cdots\cdots(۳)$$

$\frac{۱+\text{ما}}{۱-\text{ما}}$ کے بجائے $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ لکھو اور اس لیے ما کے بجائے $\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}$۔ تب

$$\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{م}}{\text{ن}} = ۲\left\{\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right)^{۳} + \frac{۱}{۵}\left(\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}\right)^{۵} + \cdots\right\}\cdots(۴)$$

اس سے اب ہم بغیر بہت زیادہ مشقت کے، و کے اساس پر لوکارتم محسوب کر سکتے ہیں۔ بطور مثال:

ضابطہ (۴) میں م = ۲ اور ن = ۱ لکھو۔ تب

$$\text{لوک}_{\text{و}}\,۲ = ۲\left\{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳^{۳}} + \frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۳^{۵}} + \cdots\right\}$$

جس سے لوک$_{\text{و}}$ ۲ کی قیمت = ۰٫۶۹۳۱۴۷..... بآسانی محسوب ہو جاتی ہے۔

لوک ۲ معلوم کر لینے کے بعد ضابطہ (۴) سے لوک$_{\text{و}}$ ۳ کی قیمت اس طرح دریافت ہو سکتی ہے۔

$$\text{لوک}_{\text{و}}\,۳ - \text{لوک}_{\text{و}}\,۲ = ۲\left\{\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۵^{۳}} + \frac{۱}{۵}\times\frac{۱}{۵^{۵}} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= ۰٫۴۰۵۴۶۵\ldots$$

$$\text{پس لوک}_{\text{و}}\,۳ = ۰٫۶۹۳۱۴۷ + ۰٫۴۰۵۴۶۵ = ۱٫۰۹۸۶۱۲$$

اس طریقہ پر عمل کرنے سے، و کے اساس پر، کسی عدد کا لوکارتم بھی جس تقریبی درجہ تک دریافت کرنا مقصود ہو، دریافت ہو سکتا ہے۔

۳۹۔ و کے اساس پر جو لوکارتم محسوب کیے جاتے ہیں نیپیئری یا طبعی لوکارتم کہلاتے ہیں۔

تمام نظری تحقیقاتوں میں نیپیئری لوکارتم استعمال کیے جاتے ہیں۔ لیکن

جب لوکارتموں کے ذریعہ تقریبی عددی حسابات عمل میں آتے ہیں تو بعض وجوہ کے لحاظ سے جن کا عنقریب ذکر آئیگا، ہمیشہ ۱۰ کے اساس والے لوکارتم استعمال کیے جاتے ہیں۔ اس لیے ۱۰ کے اساس والے لوکارتم معمولی لوکارتم کہلاتے ہیں۔

ہم نے ابھی بتایا ہے کہ و کے اساس والے لوکارتم کس طرح دریافت کیے جاسکتے ہیں۔ جب و کے اساس کے لوکارتم معلوم ہوجاتے ہیں تو اُن کو مستقل جزوِ ضربی $\text{لوک}_{۱۰}\,\text{و}$ یا $\frac{۱}{\text{لوک}_{\text{و}}\,۱۰}$ سے ضرب دینے سے ۱۰ کے اساس والے لوکارتم حاصل ہوتے ہیں۔ یہ مستقل جزوِ ضربی مقیاس (Modulus) کہلاتا ہے۔ اس کی قیمت ۰٫۴۳۴۲۹... ہے۔

سوالات ۴ (ا)

ثابت کرو کہ:

(۱) $\text{لوک}(\text{لا}+\text{ن}) = \text{لوک لا} + \text{لوک}\left(۱+\frac{۱}{\text{لا}}\right) + \text{لوک}\left(۱+\frac{۱}{\text{لا}+۱}\right) + \text{لوک}\left(۱+\frac{۱}{\text{لا}+۲}\right) + \dots + \text{لوک}\left(۱+\frac{۱}{\text{لا}+\text{ن}-۱}\right)$

(۲) $\text{لوک}_{\text{و}}\sqrt{۱۲} = ۱ + \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right) + \frac{۱}{۴^۲}\left(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}\right) + \frac{۱}{۴^۳}\left(\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۹}\right) + \frac{۱}{۴^۴}\left(\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۸}\right) + \dots \text{لاتناہی تک}$

(۳) $\text{لوک}_{\text{و}}\sqrt{۱۰} = \left\{۱ + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{۹^۲} + \frac{۱}{۷}\cdot\frac{۱}{۹^۳} + \dots \text{لاتناہی تک}\right\} + \left\{\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{۹^۳} + \frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{۹^۵} + \frac{۱}{۷}\cdot\frac{۱}{۹^۷} + \dots \text{لاتناہی تک}\right\}$

(۴) $\text{لوک}_{\text{و}}\,۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳\times۲\times۱} + \frac{۱}{۵\times۴\times۳} + \frac{۱}{۷\times۶\times۵} + \dots \text{لاتناہی تک}$

(۵) $\frac{۵}{۳\times۲\times۱} + \frac{۷}{۵\times۴\times۳} + \frac{۹}{۷\times۶\times۵} + \dots \text{لاتناہی تک} = ۳\,\text{لوک}_{\text{و}}\,۲ - ۱$

(۶) $\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{لا}}{\text{لا}-۱} = ۲\left\{\frac{۱}{۲\text{لا}-۱} + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{(۲\text{لا}-۱)^۳} + \frac{۱}{۵}\cdot\frac{۱}{(۲\text{لا}-۱)^۵} + \dots\right\}$

(۷) $\text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{لا} = \frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}+۱} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\text{لا}^{۲}-۱}{(\text{لا}+۱)^{۲}}\right) + \frac{۱}{۳}\,\frac{\text{لا}^{۳}-۱}{(\text{لا}+۱)^{۳}} + \cdots\cdots$

(۸) $\text{لوگ}_{\text{و}}\,\frac{\text{ی}+\text{لا}}{\text{ی}-\text{لا}} = \frac{۲\,\text{ی}\,\text{لا}}{\text{ی}^{۲}+\text{لا}^{۲}} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲\,\text{ی}\,\text{لا}}{\text{ی}^{۲}+\text{لا}^{۲}}\right)^{۳} + \frac{۱}{۵}\left(\frac{۲\,\text{ی}\,\text{لا}}{\text{ی}^{۲}+\text{لا}^{۲}}\right)^{۵} + \cdots\cdots$

(۹) $۲\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{۳} + \frac{\text{لا}^{۵}}{۵} - \cdots\cdots\right) = \frac{۲\,\text{لا}}{۱-\text{لا}^{۲}} - \frac{۱}{۳}\left(\frac{۲\,\text{لا}}{۱-\text{لا}^{۲}}\right)^{۳} + \frac{۱}{۵}\left(\frac{۲\,\text{لا}}{۱-\text{لا}^{۲}}\right)^{۵} - \cdots$

(۱۰) $\left\{\text{لوگ}_{\text{و}}(۱+\text{لا})\right\}^{۲} = ۲\left\{\frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲} - \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}\right)\text{لا}^{۳} + \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)\text{لا}^{۴} - \cdots\cdots\right\}$

(۱۱) اگر $\text{لوگ}_{\text{و}}(۱+\text{لا}+\text{لا}^{۲})$ کو لا کی قوتوں میں پھیلائیں تو $\text{لا}^{\text{ن}}$ کا سر یا تو $\frac{۱}{\text{ن}}$ ہے یا $-\frac{۲}{\text{ن}}$ - ان صورتوں میں امتیاز کرو۔

(۱۲) متماثلہ $۲\,\text{لوگ}(۱-\text{لا}) \equiv \text{لوگ}(۱-۲\,\text{لا}+\text{لا}^{۲})$ سے ثابت کرو کہ

$$۲^{\text{ن}} - \text{ن}\,۲^{\text{ن}-۲} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۳)}{\lfloor ۲}\,۲^{\text{ن}-۴} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۴)(\text{ن}-۵)}{\lfloor ۳}\,۲^{\text{ن}-۶} + \cdots\cdots = ۲$$

(۱۳) $\frac{\text{و}^{\text{ن}\,\text{لا}}-۱}{۱-\text{و}^{-\text{لا}}}$ کے پھیلاؤ میں $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر $\frac{۱}{\lfloor \text{ر}}\left\{۱^{\text{ر}}+۲^{\text{ر}}+۳^{\text{ر}}+\cdots\cdots+\text{ن}^{\text{ر}}\right\}$ ہے

اس کے ذریعہ سے سلسلوں $۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+\cdots\cdots$ اور $۱^{۳}+۲^{۳}+۳^{۳}+\cdots\cdots$ کی ن رقموں کے حاصل جمع دریافت کرو۔

(۱۴) $\text{و}^{\text{و}^{\text{لا}}}$ کے پھیلاؤ میں اگر $\text{لا}^{\text{ر}}$ کا سر $\text{ک}_{\text{ر}}$ ہو تو

$$\text{ک}_{\text{ر}} = \frac{۱}{\lfloor \text{ر}}\left\{\frac{۱^{\text{ر}}}{\lfloor ۱} + \frac{۲^{\text{ر}}}{\lfloor ۲} + \frac{۳^{\text{ر}}}{\lfloor ۳} + \cdots\cdots\right\}$$

$$\text{پس}\quad \frac{۱^{۳}}{\lfloor ۱} + \frac{۲^{۳}}{\lfloor ۲} + \frac{۳^{۳}}{\lfloor ۳} + \cdots\cdots = ۵\,\text{و}$$

(۱۵) سلسلہ $\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots\cdots$ کی ن رقموں کا حاصل جمع (ن + ۱) ویں رقم سے اگر آغاز کیا جائے تو $\text{لوگ}_{\text{و}}\,۲$ کے مساوی ہوتا ہے جبکہ ن بلا انتہا بڑھایا جاتا ہے۔

(۱۶) $\text{لوگ}_{\text{و}}(۱+\text{ن}) < \frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\cdots\cdots+\frac{۱}{\text{ن}} < ۱+\text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{ن}$

عام لوکارتم

۴۰۔ حسابی عمل اساس ۱۰ کے لوکارتموں کے ذریعہ بہت آسان ہوجاتا ہے۔ ذیل کی بحث میں لوکارتموں کا اساس اگر محذوف ہو تو سمجھنا چاہیے کہ وہ ۱۰ ہی ہے۔

اگر دو عددوں کی رقمیں (Figures) ایک ہی ہوں اور ان کا تواتر بھی ایک ہی ہو لیکن فرق صرف نشانِ اعشاریہ کے مقام میں ہو تو واضح ہے کہ ایک عدد دوسرے عدد کو ۱۰ کی کسی صحیح قوت سے ضرب دینے سے حاصل ہوسکتا ہے۔ پس ان عددوں کے لوکارتموں میں صرف ایک صحیح عدد کا تفاوت ہوگا۔

مثلاً لوگ ۷۲۲،۹۸ = لوگ ۷،۲۲۹۸ + لوگ ۱۰۰ = ۲ + لوگ ۷،۲۲۹۸
= ۲ + ۰،۸۹۷۷۱ = ۲،۸۷۹۰۷۷۱ اعشاریہ کے ساتھ مقاموں تک۔

اسی طرح چونکہ لوگ ۲ = ۰،۳۰۱۰۳ اعشاریہ کے ۵ مقاموں تک تو
لوگ ۰،۰۰۲ = لوگ (۲ ÷ ۱۰۰۰) = لوگ ۲ - لوگ ۱۰۰۰ = ۰،۳۰۱۰۳ - ۳ ۔

مصرحۂ بالا خواص کی وجہ سے عام (یعنی ۱۰ کے اساس والے) لوکارتم ہمیشہ اعشاریہ کے حصّہ کو مثبت قائم رکھ کر لکھے جاتے ہیں۔ چنانچہ لوگ ۰،۰۰۲ کی قیمت $\bar{۳}$،۳۰۱۰۳ لکھی جاتی ہے یعنی اعشاریہ سے پہلے کا جزو ۳ ہے اس پر ایک چھوٹا سا خط کھینچا جاتا ہے تاکہ صرف وہی منفی بتایا جائے۔

اسی طرزِ کتابت میں لوکارتم کا اعشاریہ والا مثبت حصّہ اعشاریۂ لوکارتمی (Mantissa) کہلاتا ہے۔ اور اس کا صحیح حصّہ خواہ مثبت ہو یا منفی لوکارتم کا ممیّز کہلاتا ہے۔

۴۱۔ کسی بھی عدد کے لوکارتم کا ممیّز محض اس عدد کے معائنہ سے معلوم ہوجاتا ہے۔ اس لیے کہ اگر کوئی عدد ایک سے بڑا ہو اور اس کے صحیح حصّہ میں رقموں کی تعداد ن ہو تو واضح ہے کہ وہ عدد $۱۰^{ن}$ سے چھوٹا اور $۱۰^{ن-۱}$ سے بڑا ہے۔ پس اس کا لوکارتم ن اور ن-۱ کے مابین ہوگا

یعنی یہ لوکارتم ن - ۱ + ایک اعشاریہ رقم ہوگا۔

بناء بریں ایک سے بڑے کسی بھی عدد کے لوکارتم کا ممیّز اس عدد کے صحیح حصہ کی رقموں کی تعداد سے ایک کم ہوگا۔

اگر دیا ہوا عدد ایک سے کم یعنی صرف اعشاریہ ہی پر مشتمل ہو اور اس کی سب سے پہلی ملحوظ رقم کے آگے ن صفر ہوں تو دیا ہوا عدد $۱۰^{-ن-۱}$ سے بڑا مگر $۱۰^{-ن}$ سے چھوٹا ہوگا۔ پس چونکہ لوکارتم کا اعشاریہ والا حصہ ہمیشہ مثبت رہنا چاہیئے اس عدد کا لوکارتم - (ن + ۱) + ایک اعشاریہ رقم ہوگا۔

پس اگر کوئی عدد ایک سے کم ہو اور اعشاریہ کی شکل میں لکھا گیا ہو تو اس کے لوکارتم کا ممیّز منفی اور دیے ہوئے عدد کی پہلی ملحوظ رقم سے پہلے لکھے ہوئے صفروں کی تعداد سے ایک زیادہ ہوگا۔

مثلاً ۳۵۷۱٫۴ کے لوکارتم کا ممیز ۳ اور ۰٫۰۰۰۳۵۷۱۴ کا ممیز ۴̄ ہے۔

۴۴۔ کسی دیے ہوئے عدد کے لوکارتم کی تعیین متناسب تفاوتوں کے اصول کے ذریعہ۔

اگر کسی عدد کی ملحوظ رقموں کی تعداد، لوکارتموں کی جدول میں دیے ہوئے عددوں کی رقموں کی تعداد سے زیادہ ہو اور جدول کے دو متواتر عددوں کا تفاوت ان ہر دو عددوں کے تفاوت کے مقابلہ میں چھوٹا ہو تو ان عددوں کے لوکارتموں کا تفاوت خود اُن کے تفاوت کے متناسب ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\text{لوک}_{۱۰}(\text{ن}+\text{لا})-\text{لوک}_{۱۰}\text{ن}=\text{لوک}_{۱۰}\left(۱+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)=\text{مق}\;\text{لوک}_{\text{ے}}\left(۱+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)$$

$$=\text{مق}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}}-\frac{۱}{۲}\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ن}^{۲}}+\ldots\right)=\text{مق}\,\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$$

تقریباً، جبکہ $\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ بہت چھوٹا ہوتا ہے۔ مق سے مُراد مقیاس $\frac{۱}{\text{لوک}_{\text{ے}}۱۰}$ ہے۔

طالب علم کو لوکارتمی جدولوں سے استفادہ کرنے میں کافی مشق ہوگی۔

اِس لیے عملی کام میں مزید ہدایات کی ضرورت نہیں سمجھی گئی۔

سود مرکب اور سالیانے

۴۴۔ سود مرکب اور سالیانوں کے تمام سوالات مندرجۂ ذیل تین سوالوں کے تابع ہیں:-

(۱) ایک مقررہ تعدادِ سال کے لیے ایک مقررہ شرحِ سود سے سود مرکب پر قرض دیے ہوئے روپیہ کے کل زر کی تعیین۔

فرض کرو کہ اصل رقم پ، تعداد سال ن، شرح سود فی صد فی سال ۱۰۰ ر ہے اور مطلوبہ کُل زر ا ہے۔

تب پ کا سود ایک سال کے لیے پ ر ہے اور پہلے سال کے ختم پر کُل زر یعنی اصل مع سود پ (۱ + ر) ہے۔ اب دوسرے سال اس روپیہ کو اصل مان کر سود محسوب کیا جاتا ہے۔ پس دوسرے سال کے ختم پر کُل زر {پ (۱ + ر)} (۱+ر) = پ (۱+ر)^{۲} ہوگا۔ اسی طرح ن سالوں کے ختم پر کُل زر پ (۱ + ر)^{ن} ہوگا۔

یعنی ا = پ (۱ + ر)^{ن}

اور لوگ ا = لوگ پ + ن لوگ (۱ + ر)

اگر سود نصف نصف سال کے ختم پر محسوب ہو کر اصل میں جمع کیا جاتا ہے تو واضح ہے کہ ن سال کا کُل زر پ (۱ + $\frac{ر}{۲}$)^{۲ن} ہوگا۔

(۲) کسی ایسے روپیہ کی حاضرہ قیمت کی تعیین جو ایک مقررہ شرح سود مرکب سے ایک مقررہ مدت کے بعد واجب الادا ہے۔

فرض کرو کہ ا روپیہ ن سال کے بعد واجب الادا ہے اور شرحِ سود ۱۰۰ ر فی صد فی سال فرض کرکے پ اس کی حاضرہ قیمت ہے تو پ روپیہ ن سال میں ۱۰۰ ر فی صد فی سال کی شرح سے کُل زر ا ہو جانا چاہیے۔ پس سوال (۱) کی رو سے

پ = ا (۱ + ر)$^{-ن}$

(۳) ن متواتر سال تک ہر سال کے ختم پر ا پونڈ واجب الادا سالیانہ کی حاضرہ قیمت کی تعیین۔

اگر سود کی شرح ۱۰۰ ر فی صدی سال فرض کی جائے تو ازروئے سوال (۲)

پہلے سال کے ختم پر ادا شدنی روپیہ کی حاضرہ قیمت ا$(1+\text{ر})^{-1}$ ہے

دوسرے .... ا$(1+\text{ر})^{-2}$ ہے

....

ن ۔ ویں .... ا$(1+\text{ر})^{-\text{ن}}$ ہے

پس تمام روپیہ کی حاضرہ قیمت

$$\text{ا}\left\{\frac{1}{1+\text{ر}}+\frac{1}{(1+\text{ر})^{2}}+\cdots+\frac{1}{(1+\text{ر})^{\text{ن}}}\right\}=\frac{\text{ا}}{\text{ر}}\left\{1-\frac{1}{(1+\text{ر})^{\text{ن}}}\right\}$$ ہے

مثال ۔ ۲۰ سال تک ۳۰ پونڈ سالیانہ کی حاضرہ قیمت دریافت کرو جبکہ سود کی شرح ۴ فی صدی سال ہے۔

یہاں $\text{ا} = ۳۰$ ، $\text{ن} = ۲۰$ ، $\text{ر} = \frac{۴}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲۵}$

پس حاضرہ قیمت $= ۳۰ \times ۲۵ \left\{ ۱ - \left(\frac{۲۵}{۲۶}\right)^{۲۰} \right\}$

لوک $\left(\frac{۲۵}{۲۶}\right)^{۲۰}$ = ۲۰ {لوک ۲۵ - لوک ۲۶}

= ۲۰ {۱٫۳۹۷۹۴۰۰ - ۱٫۴۱۴۹۷۳۳}

= ۲۰ (۰٫۰۱۷۰۳۳۳-) = ۰٫۳۴۰۶۶۶- = $\bar{۱}$٫۶۵۹۳۳۴

= لوگ ۰٫۴۵۶۳۸۹ لوکارتمی جدولوں سے۔

پس مطلوبہ حاضرہ قیمت = ۳۰ × ۲۵ × (۱ - ۰٫۴۵۶۳۸۹) = ... ۴۰۷٫۷ پونڈ

سوالات ۲۴ (ب)

(لوکارتمی جدولیں استعمال کی جائیں)

(۱) ۵۰ سال میں ۱۰۰ پونڈ کا کُل زر ۵ فی صدی سال شرح سود کے حساب سے دریافت کرو۔

(۲) ثابت کرو کہ ۱۵ سال میں ۵ فی صد فی سال شرح سود پر اور ۱۸ سال میں ۴ فی صد فی سال شرح سود پر، روپیہ اپنے دوچند سے زیادہ ہوجاتا ہے۔

(۳) ۱۰ سال تک اگر سود نصف نصف سال پر ۴ فی صد فی سال کی شرح سے جمع کیا جائے تو ۵۰۰ پونڈ کا کُل زر کیا ہوگا؟

(۴) ایک ملک میں ہر سال کے آغاز پر سالانہ ولادت کی شرح ۵۰ فی ہزار نفر آبادی ہے اور اموات کی شرح سالانہ ۲۵ فی ہزار نفر ہے۔ ثابت کرو کہ ۲۲ سال میں آبادی دوچند سے زیادہ ہوجائیگی۔

(۵) ایک شخص سیونگز بنک میں جو تمام قسم کی امانتی رقموں پر $2\frac{1}{2}$ فی صد سالانہ منافع دیتا ہے ۳۰ پونڈ داخل کرتا ہے۔ ۲۰ برس کے بعد اس کا کُل زر کیا ہوگا؟

(۶) ۴ فی صد سالانہ کی شرح سود پر، ہر سال ۱۰۰ پونڈ سالیانہ ۴۰ سال تک حاصل کرنے کے لیے کس قدر روپیہ داخل کرنے کی ضرورت ہوگی؟

(۷) ایک مجلس ۳۰۰۰ پونڈ ۳۰ مساوی سالانہ قسطوں میں ادا کرنے کے وعدہ سے قرض لیتی ہے۔ اگر بازار میں منافع کی شرح ۴ فی صد سالانہ ہے تو دریافت کرو کہ ہر سال کس قدر روپیہ ادا کیا جانا چاہیے۔

پانچواں باب

ڈی مؤاوَر کا مسئلہ اور اس کے استعمالات

۴۴ ۔ ن کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے (جم طہ + خ جب طہ)^ن کی قیمت یا اس کی قیمتوں میں سے ایک قیمت جم ن طہ + خ جب ن طہ ہے۔

اِس مسئلہ کو ڈی مؤاوَر کا مسئلہ کہتے ہیں۔ اِس کو ثابت کرنے سے پہلے ہم یہ ثابت کرینگے کہ

(جم طہ۱ + خ جب طہ۱) (جم طہ۲ + خ جب طہ۲) ..... ن اجزائے ضربی تک

= جم (طہ۱ + طہ۲ + ... + طہن) + خ جب (طہ۱ + طہ۲ + ... + طہن)

چونکہ (جم طہ۱ + خ جب طہ۱) (جم طہ۲ + خ جب طہ۲)

= جم طہ۱ جم طہ۲ + خ (جب طہ۱ جم طہ۲ + جم طہ۱ جب طہ۲) ۔ جب طہ۱ جب طہ۲

= جم (طہ۱ + طہ۲) + خ جب (طہ۱ + طہ۲)

یعنی دراںحالیکہ ن = ۲ مسئلہ مصرحۂ بالا درست ہے۔

اگر ہم تین اجزائے ضربی لیں تو

(جم طہ۱ + خ جب طہ۱) (جم طہ۲ + خ جب طہ۲) (جم طہ۳ + خ جب طہ۳)

= {جم (طہ۱ + طہ۲) + خ جب (طہ۱ + طہ۲)} (جم طہ۳ + خ جب طہ۳)

= جم (طہ۱ + طہ۲ + طہ۳) + خ جب (طہ۱ + طہ۲ + طہ۳)

پس مسئلہ بالا ن = ۳ کے لیے بھی درست ہے۔

اِس طرح عمل پیرا ہونے سے معلوم ہو گا کہ یہ مسئلہ بہ حیثیتِ عمومی کسی بھی مثبت صحیح عدد کے لیے درست ہے۔ [اس مسئلہ کے ذریعہ ہم

ن زاویوں کے مجموعہ کی جیوب التمام یا جیوب کو ان زاویوں کی نسبتوں کی رقموں میں ظاہر کر سکتے ہیں۔ چونکہ

جم (طہ$_1$ + طہ$_2$ + ... + طہ$_ن$) + خ جب (طہ$_1$ + طہ$_2$ + ... + طہ$_ن$)

= (جم طہ$_1$ + خ جب طہ$_1$) (جم طہ$_2$ + خ جب طہ$_2$) ..... (جم طہ$_ن$ + خ جب طہ$_ن$)

= جم طہ$_1$ جم طہ$_2$ ..... جم طہ$_ن$ (۱ + خ مس طہ$_1$) (۱ + خ مس طہ$_2$) ..... (۱ + خ مس طہ$_ن$)

∴ جم (طہ$_1$ + طہ$_2$ + ... + طہ$_ن$) = جم طہ$_1$ جم طہ$_2$ ..... جم طہ$_ن$ {۱ − ح$_2$ + ح$_4$ − .....}

اور جب (طہ$_1$ + طہ$_2$ + ... + طہ$_ن$) = جم طہ$_1$ جم طہ$_2$ ..... جم طہ$_ن$ {ح$_1$ − ح$_3$ + ح$_5$ − .....}

جس میں ح$_1$ = مماسوں کا حاصل جمع ہے، ایک ایک مماس کو فرداً فرداً لے کر۔

ح$_2$ = دو دو مماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع ہے۔

ح$_3$ = تین تین مماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع ہے۔

اِس سے براہِ راست یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ

مس (طہ$_1$ + طہ$_2$ + ... + طہ$_ن$) = (ح$_1$ − ح$_3$ + ح$_5$ − .....) / (۱ − ح$_2$ + ح$_4$ − ح$_6$ + ...)

۴۵۔ ڈی مؤاوَر کے مسئلہ کا ثبوت جبکہ ن (۱) ایک مثبت صحیح عدد ہے، (۲) ایک منفی صحیح عدد ہے، (۳) ایک مثبت کسر ف/ق اس کی سب سے چھوٹی رقموں میں ہے اور ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں، (۴) ایک منفی کسر −ف/ق اس کی سب سے چھوٹی رقموں میں، ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں۔

واضح ہو کہ (۱) اور (۲) صورتوں میں (جم طہ + خ جب طہ)^ن کی صرف ایک قیمت یعنی جم ن طہ + خ جب ن طہ ہوگی۔ (۳) اور (۴) صورتوں میں جملہ ق قیمتیں ہونگی جن کے منجملہ جم ن طہ + خ جب ن طہ ایک قیمت ہوگی۔ آگے چل کر بتایا جائیگا کہ بقیہ قیمتیں کیا ہونگی۔

صورت (۱)۔ جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

سابقہ فصل میں ہم نے دیکھا ہے کہ (جم طہ$_1$ + خ جب طہ$_1$) (جم طہ$_2$ + خ جب طہ$_2$) ..... (جم طہ$_ن$ + خ جب طہ$_ن$)

= جم (طہ۱ + طہ۲ + ... + طہن) + خ جب (طہ۱ + طہ۲ + ... + طہن)

طہ۱ = طہ۲ = ... = طہن = طہ لکھو۔ تب

(جم طہ + خ جب طہ)^ن = جم ن طہ + خ جب ن طہ

صورت (۲) — جبکہ ن ایک منفی صحیح عدد -م ہے جس میں م ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

چونکہ (جم م طہ + خ جب م طہ) (جم م طہ - خ جب م طہ) = ۱

پس جم م طہ - خ جب م طہ = ۱ / (جم م طہ + خ جب م طہ)

= ۱ / (جم طہ + خ جب طہ)^م صورت (۱) سے

∴ جم (- م طہ) + خ جب (- م طہ) = (جم طہ + خ جب طہ)^-م

∴ جم ن طہ + خ جب ن طہ = (جم طہ + خ جب طہ)^ن

صورت (۳) - جبکہ ن کوئی مثبت کسر ف/ق اس کی سب سے چھوٹی رقموں میں ہے، اور ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں۔

چونکہ (جم ف/ق طہ + خ جب ف/ق طہ)^ق = جم ف طہ + خ جب ف طہ، صورت (۱) سے

(جم ف/ق طہ + خ جب ف/ق طہ) جملہ (جم ف طہ + خ جب ف طہ) کی ق ویں اصلوں میں سے ایک اصل ہے۔

∴ جم ف/ق طہ + خ جب ف/ق طہ جملہ (جم طہ + خ جب طہ)^ف کی ق - ویں اصلوں میں سے ایک اصل ہے، صورت (۱) کی رو سے۔

∴ جم ف/ق طہ + خ جب ف/ق طہ جملہ (جم طہ + خ جب طہ)^(ف/ق) کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہے۔

صورت (۴) - جبکہ ن = - ف/ق اور ف اور ق مثل صورت (۳) کے ہیں۔

چونکہ $\left\{ \text{جم} \left(- \frac{\text{ف ط}}{\text{ق}}\right) + \text{خ جب} \left(- \frac{\text{ف ط}}{\text{ق}}\right) \right\}^{\text{ق}}$

$= \text{جم} (- \text{ف ط}) + \text{خ جب} (- \text{ف ط})$ صورت (۱) سے

$\text{جم} \left(- \frac{\text{ف ط}}{\text{ق}}\right) + \text{خ جب} \left(- \frac{\text{ف ط}}{\text{ق}}\right)$ جملہ $\text{جم} (- \text{ف ط}) + \text{خ جب} (- \text{ف ط})$ کی ق۔ ویں اصلوں میں سے ایک اصل ہے۔

$\therefore$ $\text{جم} \left(- \frac{\text{ف ط}}{\text{ق}}\right) + \text{خ جب} \left(- \frac{\text{ف ط}}{\text{ق}}\right)$ جملہ $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{-\text{ق}}$ کی ق۔ ویں اصلوں میں سے ایک اصل ہے، صورت (۲) سے۔

اس لیے $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{-\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

$\text{جم} \left(- \frac{\text{ف ط}}{\text{ق}}\right) + \text{خ جب} \left(- \frac{\text{ف ط}}{\text{ق}}\right)$ ہے۔

یہ مسئلہ ن کی غیر منطق قیمتوں کے لیے بھی صادق آتا ہے اور اس طرح سے ن کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے صحیح ہے، لیکن اس کا باضابطہ ثبوت اس نصاب کے لیے غیر موزوں ہوگا۔

۴۶۔ اب ہم یہ بتانا چاہتے ہیں کہ $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\text{ن}}$ کی دوسری اور قیمتیں کیا ہیں جبکہ

$$\text{ن} = \pm \frac{\text{ف}}{\text{ق}}$$

چونکہ $\left\{ \text{جم} \left(\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}} + \frac{2\text{ر}\pi}{\text{ق}}\right) + \text{خ جب} \left(\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}} + \frac{2\text{ر}\pi}{\text{ق}}\right) \right\}^{\text{ق}}$

$= \text{جم} (\text{ف ط} + 2\text{ر}\pi) + \text{خ جب} (\text{ف ط} + 2\text{ر}\pi)$

$= \text{جم ف ط} + \text{خ جب ف ط}$ جبکہ ر کوئی سا صحیح عدد ہے۔

$= (\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\text{ف}}$

$\therefore$ $(\text{جم ط} + \text{خ جب ط})^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ کی ق قیمتوں میں سے

$\text{جم} \left(\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}} + \frac{2\text{ر}\pi}{\text{ق}}\right) + \text{خ جب} \left(\frac{\text{ف ط}}{\text{ق}} + \frac{2\text{ر}\pi}{\text{ق}}\right)$

ایک قیمت ہے جبکہ ر کوئی سا مثبت یا منفی صحیح عدد ہے ۔

لیکن $\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\,\pi}{\text{ق}}$ زاویے، جبکہ ر کو صفر، ۱، ۲، ...، (ق-۱) قیمتیں دی جاتی ہیں، سب مختلف ہیں اور ان میں سے کوئی سے دو ایک ہی وقت میں مساوی جیوب التمام اور مساوی جیوب نہیں رکھتے ہیں۔

$$\therefore \text{جملہ جم}\left(\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\,\pi}{\text{ق}}\right) + \text{خ جب}\left(\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\,\pi}{\text{ق}}\right)$$

ان ق صحیح عددوں کے لیے ق مختلف قیمتیں رکھتا ہے ۔

معہذا، ر کو کسی دوسرے صحیح عدد کے مساوی لکھنے سے یہ جملہ ان ق قیمتوں میں سے ایک یا دوسری قیمت کو دوہراتا ہے ۔

اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ر کی کوئی سی متصل ق صحیح عددی قیمتیں، اور علی الخصوص صفر، ۱.....(ق-۱) قیمتیں $\text{جم}\left(\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\,\pi}{\text{ق}}\right) + \text{خ جب}\left(\frac{\text{ف طہ}}{\text{ق}} + \frac{\text{۲ ر}\,\pi}{\text{ق}}\right)$ کو جملہ $(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ})^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ کی ق مختلف قیمتوں کے مساوی بناتی ہیں۔ اور نیز یہ کہ (جم طہ + خ جب طہ) کی ق ۔ ویں اصلیں مندرجۂ ذیل ہیں :-

$$\text{جم}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{طہ}}{\text{ق}}،$$

$$\text{جم}\,\frac{\text{طہ} + ۲\pi}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{طہ} + ۲\pi}{\text{ق}}،$$

$$\text{جم}\,\frac{\text{طہ} + ۴\pi}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{طہ} + ۴\pi}{\text{ق}}،$$

. . . .

$$\text{جم}\,\frac{\text{طہ} + ۲(\text{ق}-۱)\pi}{\text{ق}} + \text{خ جب}\,\frac{\text{طہ} + ۲(\text{ق}-۱)\pi}{\text{ق}}$$

سوالات ۵ (ا)

(۱) $(\sqrt{۳} + \text{خ})$ کو شکل ر (جم طہ + خ جب طہ) کی شکل میں لکھو

اور اسی طرح $(\sqrt{3} + \text{خ})^{6}$ کی قیمت نکالو۔

چونکہ $\sqrt{3} + \text{خ} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\text{خ}\right) = 2\left(\text{جم}\,\frac{\pi}{6} + \text{خ جب}\,\frac{\pi}{6}\right)$

$\therefore\ (\sqrt{3} + \text{خ})^{6} = 2^{6}\left(\text{جم}\,\frac{\pi}{6} + \text{خ جب}\,\frac{\pi}{6}\right)^{6}$

$= 2^{6}(\text{جم}\,\pi + \text{خ جب}\,\pi) = -2^{6}$

(۲) ثابت کرو کہ اگر $\text{جم ع} + \text{جم بہ} + \text{جم جہ} = 0$

اور $\text{جب ع} + \text{جب بہ} + \text{جب جہ} = 0$

تب $\text{جم}\,3\,\text{ع} + \text{جم}\,3\,\text{بہ} + \text{جم}\,3\,\text{جہ} = 3\,\text{جم}(\text{ع} + \text{بہ} + \text{جہ})$

اور $\text{جب}\,3\,\text{ع} + \text{جب}\,3\,\text{بہ} + \text{جب}\,3\,\text{جہ} = 3\,\text{جب}(\text{ع} + \text{بہ} + \text{جہ})$

فرض کرو $\text{ا} = \text{جم ع} + \text{خ جب ع}$، $\text{ب} = \text{جم بہ} + \text{خ جب بہ}$، $\text{ج} = \text{جم جہ} + \text{خ جب جہ}$

تب $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = 0$

لیکن $\text{ا}^{3} + \text{ب}^{3} + \text{ج}^{3} - 3\,\text{ا ب ج} = (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})(\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2} + \text{ج}^{2} - \text{ا ب} - \text{ب ج} - \text{ج ا})$

چونکہ $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = 0$ اس لیے $\text{ا}^{3} + \text{ب}^{3} + \text{ج}^{3} = 3\,\text{ا ب ج}$

لیکن $\text{ا}^{3} = (\text{جم ع} + \text{خ جب ع})^{3} = \text{جم}\,3\,\text{ع} + \text{خ جب}\,3\,\text{ع}$، اسی طرح ب^{3} اور ج^{3} بھی علی الترتیب $= \text{جم}\,3\,\text{بہ} + \text{خ جب}\,3\,\text{بہ}$ اور $\text{جم}\,3\,\text{جہ} + \text{خ جب}\,3\,\text{جہ}$

پس $3\,\text{ا ب ج} = 3(\text{جم ع} + \text{خ جب ع})(\text{جم بہ} + \text{خ جب بہ})(\text{جم جہ} + \text{خ جب جہ})$

$= 3\{\text{جم}(\text{ع} + \text{بہ} + \text{جہ}) + \text{خ جب}(\text{ع} + \text{بہ} + \text{جہ})\}$

مساوات $\text{ا}^{3} + \text{ب}^{3} + \text{ج}^{3} = 3\,\text{ا ب ج}$ کے حقیقی اور خیالی حصص کو علی الترتیب مساوی لکھنے سے

$\text{جم}\,3\,\text{ع} + \text{جم}\,3\,\text{بہ} + \text{جم}\,3\,\text{جہ} = 3\,\text{جم}(\text{ع} + \text{بہ} + \text{جہ})$

اور $\text{جب}\,3\,\text{ع} + \text{جب}\,3\,\text{بہ} + \text{جب}\,3\,\text{جہ} = 3\,\text{جب}(\text{ع} + \text{بہ} + \text{جہ})$

(۳) ثابت کرو کہ اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہے تو

$$\left(\frac{1 + \text{جب فہ} + \text{خ جم فہ}}{1 + \text{جب فہ} - \text{خ جم فہ}}\right)^{\text{ن}} = \text{جم}\left(\frac{\text{ن}\,\pi}{2} - \text{ن فہ}\right) + \text{خ جب}\left(\frac{\text{ن}\,\pi}{2} - \text{ن فہ}\right)$$

(۴) تماثل $\frac{(\text{لا} - \text{ب})(\text{لا} - \text{ج})}{(\text{ا} - \text{ب})(\text{ا} - \text{ج})} + \frac{(\text{لا} - \text{ج})(\text{لا} - \text{ا})}{(\text{ب} - \text{ج})(\text{ب} - \text{ا})} + \frac{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} - \text{ب})}{(\text{ج} - \text{ا})(\text{ج} - \text{ب})} = 1$

میں $\text{لا} = \text{جم}\,2\,\text{طہ} + \text{خ جب}\,2\,\text{طہ}$ اور $\text{ا} = \text{جم}\,2\,\text{ع} + \text{خ جب}\,2\,\text{ع}$ وغیرہ لکھ کر

ثابت کرو کہ Σ (جب (طہ - بہ) جب (طہ - جہ)) / (جب (عہ - بہ) جب (عہ - جہ)) جب ۲ (طہ - عہ) = ۰

ڈی مواور کے مسئلہ کے استعمالات

۴۷۔ جب ن طہ، جم ن طہ اور مس ن طہ کا طہ کی نسبتوں کی رقموں میں اظہار جبکہ ن کوئی سا مثبت صحیح عدد ہے۔

چونکہ (جم ن طہ + خ جب ن طہ) = (جم طہ + خ جب طہ)^{ن}

آخر الذکر جملہ کو پھیلا کر تماثل کے حقیقی حصص کو ایک دوسرے کے مساوی اور اسی طرح خیالی حصص کو باہمدیگر مساوی لکھنے سے،

جم ن طہ = جم^{ن} طہ - $\frac{ن (ن - ۱)}{۲ × ۱}$ جم$^{ن - ۲}$ طہ جب^{۲} طہ + ……

جب ن طہ = ن جم$^{ن - ۱}$ طہ جب طہ - $\frac{ن (ن - ۱) (ن - ۲)}{۳ × ۲ × ۱}$ جم$^{ن - ۳}$ طہ جب^{۳} طہ + ……

پس مس ن طہ = (ن مس طہ - $\frac{ن (ن - ۱) (ن - ۲)}{۳ × ۲ × ۱}$ مس^{۳} طہ + ……) ÷ (۱ - $\frac{ن (ن - ۱)}{۲ × ۱}$ مس^{۲} طہ + $\frac{ن (ن - ۱) (ن - ۲) (ن - ۳)}{۴ × ۳ × ۲ × ۱}$ مس^{۴} طہ + ……)

سوالات ۵ (ب)

ثابت کرو کہ (۱) جم ۴ طہ = جم^{۴} طہ - ۶ جم^{۲} طہ جب^{۲} طہ + جب^{۴} طہ

(۲) جب ۴ طہ = ۴ جب طہ جم^{۳} طہ - ۴ جم طہ جب^{۳} طہ

(۳) جم ۵ طہ = جم^{۵} طہ - ۱۰ جم^{۳} طہ جب^{۲} طہ + ۵ جم طہ جب^{۴} طہ

(۴) جب ۵ طہ = ۵ جب طہ جم^{۴} طہ - ۱۰ جب^{۳} طہ جم^{۲} طہ + جب^{۵} طہ

(۵) جم ۶ طہ = جم^6 طہ - ۱۵ جم^4 طہ جب^2 طہ + ۱۵ جم^2 طہ جب^4 طہ - جب^6 طہ

(۶) جب ۶ طہ = ۶ جم^5 طہ جب طہ - ۲۰ جم^3 طہ جب^3 طہ + ۶ جم طہ جب^5 طہ

(۷) مس ۴ طہ = (۴ مس طہ - ۴ مس^3 طہ) / (۱ - ۶ مس^2 طہ + مس^4 طہ)

(۸) مس ۵ طہ = (۵ مس طہ - ۱۰ مس^3 طہ + مس^5 طہ) / (۱ - ۱۰ مس^2 طہ + ۵ مس^4 طہ)

(۹) اگر ن کوئی ایک طاق مثبت صحیح عدد ہے تو بتاؤ کہ مندرجۂ ذیل (ن-۱) مقادیر

مس π/ن ، مس ۲π/ن ..... مس (ن-۱)π/ن

کے دو دو مقادیر کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع ن(۱-ن)/۲ ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ مس طہ/ن + مس (طہ+π)/ن + مس (طہ+۲π)/ن + ... + مس (طہ+(ن-۱)π)/ن

= ن مم طہ یا ن مس طہ بموجب اس کے کہ ن جفت عدد ہے یا طاق۔

۷۴ - جب ن طہ اور جم ن طہ کے لیے جم طہ یا جب طہ کی نزولی قوتوں کے سلسلوں میں جملے۔

سابقہ فصل کے نتائج پر غور کرنے سے واضح ہوگا کہ ن کوئی سا صحیح عدد ہو ہم جم ن طہ کو جم طہ کی نزولی قوتوں کے محدود سلسلے میں ظاہر کر سکتے ہیں، اس لیے کہ جم ن طہ کے لیے جو جملہ لکھا جاتا ہے اس میں جب طہ کی ساری قوتیں جفت ہیں۔

مثلاً جم ۳ طہ = جم^3 طہ - ۳ جم طہ جب^2 طہ

= جم^3 طہ - ۳ جم طہ (۱ - جم^2 طہ)

= جم^3 طہ - ۳ جم طہ + ۳ جم^3 طہ = ۴ جم^3 طہ - ۳ جم طہ

[واضح ہو کہ یہ نتیجہ ابتدائی علم مثلثات کا مشہور ضابطہ ہے اور بہت آسان طریقہ سے حاصل ہوتا ہے]

جم ۴ طہ = جم^4 طہ - ۶ جم^2 طہ جب^2 طہ + جب^4 طہ

= جم^4 طہ - ۶ جم^2 طہ (۱- جم^2 طہ) + (۱- جم^2 طہ)^2

= ۸ جم^4 طہ - ۸ جب^2 طہ + ۱

معہذا، اگر ن طاق عدد ہے تو $\frac{\text{جم ن طہ}}{\text{جم طہ}}$ کو جب طہ کی نزولی قوتوں کے محدود سلسلہ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثلاً $\frac{\text{جم ۳ طہ}}{\text{جم طہ}}$ = - ۴ جب^2 طہ + ۱

$\frac{\text{جم ۵ طہ}}{\text{جم طہ}}$ = ۱۶ جب^4 طہ - ۱۲ جب^2 طہ + ۱

یہ واضح ہے کہ اگر ن طاق عدد ہے تو جب ن طہ کو جب طہ کی نزولی قوتوں کے محدود سلسلہ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثلاً جب ۳ طہ = - ۴ جب^3 طہ + ۳ جب طہ

یہ بھی واضح ہے کہ اگر ن جفت عدد ہے تو $\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جم طہ}}$ کو بھی ایسے ہی محدود سلسلہ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

مثلاً $\frac{\text{جب ۴ طہ}}{\text{جم طہ}}$ = $\frac{\text{۴ جب طہ جم}^3\text{ طہ - ۴ جم طہ جب}^3\text{ طہ}}{\text{جم طہ}}$

= ۴ جب طہ جم^2 طہ - ۴ جب^3 طہ

= ۴ جب طہ (۱ - جب^2 طہ) - ۴ جب^3 طہ

= - ۸ جب^3 طہ + ۴ جب طہ

جم ن طہ اور $\frac{\text{جب ن طہ}}{\text{جب طہ}}$ کو محض جم طہ یا جب طہ کی قوتوں کے سلسلوں میں عام طور پر پھیلا سکتے ہیں۔ لیکن ان کا باضابطہ ثبوت چونکہ اس نصاب سے بالاتر ہے اس لیے ہم صرف چند آسان مثالوں ہی پر اکتفا کرتے ہیں۔

سوالات ۵ (ج)

ثابت کرو۔ (۱) جم ۷ طہ = ۶۴ جم^7 طہ - ۱۱۲ جم^5 طہ + ۵۶ جم^3 طہ - ۷ جم طہ

(۲) جب ۷ طہ = ۷ جب طہ - ۵۶ جب^{۳} طہ + ۱۱۲ جب^{۵} طہ - ۶۴ جب^{۷} طہ

(۳) جم ۸ طہ = ۱۲۸ جم^{۸} طہ - ۲۵۶ جم^{۶} طہ + ۱۶۰ جم^{۴} طہ - ۳۲ جم^{۲} طہ + ۱

(۴) جب ۸ طہ = جب طہ (۱۲۸ جم^{۷} طہ - ۱۹۲ جم^{۵} طہ + ۸۰ جم^{۳} طہ - ۸ جم طہ)

۴۸ - کسری زاویوں کی مثلثی نسبتیں -

مثلثات کی ابتدائی کتاب میں طالب علم نے پڑھا ہوگا کہ جب طہ دیا جاتا ہے تو جب $\frac{\text{طہ}}{۲}$ کی چار ممکنہ قیمتیں ہوتی ہیں اور اسی طرح جم $\frac{\text{طہ}}{۲}$ کی چار قیمتیں۔ اور جم طہ دیا جاتا ہے تو جب $\frac{\text{طہ}}{۲}$ کی دو ممکنہ قیمتیں ہوتی ہیں اور جم $\frac{\text{طہ}}{۲}$ کی دو قیمتیں۔ سلسلہ مندرجۂ فصل (۴۶) کے ذریعہ ہم زاویہ $\frac{\text{طہ}}{\text{ن}}$ کے متعلق اس کے متشابہ معلومات حاصل کر سکتے ہیں۔

مساوات جم طہ = جم$^{\text{ن}}$ $\frac{\text{طہ}}{\text{ن}}$ - $\frac{\text{ن (ن - ۱)}}{۲ \times ۱}$ جم$^{\text{ن} - ۲}$ $\frac{\text{طہ}}{\text{ن}}$ جب^{۲} $\frac{\text{طہ}}{\text{ن}}$ + ... (۱)

پر غور کرو جو جم طہ کے لیے جم $\frac{\text{طہ}}{\text{ن}}$ کی نزولی قوتوں میں ایک جملہ ہے۔

فرض کرو کہ جم طہ معلوم ہے اور اس جیب التمام کا سب سے چھوٹا مثبت زاویہ عہ ہے۔

(۲ ر ${\pi}$ + عہ) زاویوں کی جیب التمام بھی وہی ہوگی جو عہ کی ہے، اگر ر کوئی سا مثبت صحیح عدد ہے۔

پس اگر ہم مساوات (۱) والے جملہ میں جم $\frac{\text{طہ}}{\text{ن}}$ کے عوض $\frac{۲ \text{ر} \pi + \text{عہ}}{\text{ن}}$ قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت لکھیں تو ہمیں جم (۲ ر ${\pi}$ + عہ) یا جم عہ حاصل ہو جائیگی۔

پس جم $\frac{۲ \text{ر} \pi + \text{عہ}}{\text{ن}}$ جبکہ ر = ۰، ۱، ۲ ..... (ن-۱)، جم $\frac{\text{طہ}}{\text{ن}}$ کی ن - دیں درجہ کی مساوات کی شرط کو پورا کرتی ہے۔

جم عہ = جم$^{\text{ن}}$ $\frac{\text{طہ}}{\text{ن}}$ - $\frac{\text{ن (ن - ۱)}}{۲ \times ۱}$ جم$^{\text{ن} - ۲}$ $\frac{\text{طہ}}{\text{ن}}$ (۱ - جم^{۲} $\frac{\text{طہ}}{\text{ن}}$) + ... (۲)

اگر عہ صفر یا ${\pi}$ کی کوئی ضعف نہیں ہے تو آسانی سے بتایا جا سکتا ہے کہ

$\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ ، $\text{جم}\,\frac{\text{ع} + ۲\pi}{\text{ن}}$ ، .... $\text{جم}\,\frac{\text{ع} + ۲(\text{ن} - ۱)\pi}{\text{ن}}$ .... (۳)

سب ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور اِس لیے وہ مساوات (۲) کی جو بلحاظ $\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ ایک مساوات ہے، ن اصلیں ہیں۔

بدیں حالت اِس مساوات کے ذریعہ $\text{جم}\,\frac{\text{ع}}{\text{ن}}$ ، $\text{جم}\,\frac{\text{ع} + ۲\pi}{\text{ن}}$ ، .... $\text{جم}\,\frac{\text{ع} + ۲(\text{ن} + ۱)\pi}{\text{ن}}$ کے متشاکل تفاعل دریافت ہو سکتے ہیں۔

اس کے علی الرغم اگر ع صفر یا π کی ضعف ہے اور ن > ۲ تو مساوات (۲) کی اصلیں سب مختلف نہیں ہیں بلکہ دوہرائی جاتی ہیں۔

۴۹ - اگر ہم جم ط کو جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی نزولی قوتوں کے سلسلہ میں ادا کریں جبکہ ن جفت (بالفرض ۲م) ہے تو ہمیں ایک ایسی مساوات ملتی ہے جس کی اصلیں مندرجۂ ذیل ۲م جیبیں ہیں :-

$$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲\text{م}} \text{ ، } \text{جب}\left(\frac{\text{ط}}{۲\text{م}} + \frac{\pi}{\text{م}}\right) \text{ ، } \text{جب}\left(\frac{\text{ط}}{۲\text{م}} + \frac{۲\pi}{\text{م}}\right) \text{ ، } \ldots\ldots \text{ جب}\left(\frac{\text{ط}}{۲\text{م}} + \frac{(۲\text{م} - ۱)\pi}{\text{م}}\right)$$

اِسی طرح جب ط کو جب $\frac{\text{ط}}{\text{ن}}$ کی نزولی قوتوں میں پھیلانے سے بحالیکہ ن طاق (بالفرض ۲م + ۱) ہے، ایک ایسی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں مندرجۂ ذیل ۲م + ۱ جیبیں ہیں :-

$$\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲\text{م} + ۱} \text{ ، } \text{جب}\left(\frac{\text{ط}}{۲\text{م} + ۱} + \frac{۲\pi}{۲\text{م} + ۱}\right) \text{ ، } \ldots\ldots \text{ جب}\left(\frac{\text{ط}}{۲\text{م} + ۱} + \frac{۴\text{م}\pi}{۲\text{م} + ۱}\right)$$

$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}}$ ، $\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}}$ ، $\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جم ط}}$ اور مس ن ط کے پھیلاؤ بھی اسی طرح استعمال کیے جا سکتے ہیں جیسا کہ ذیل کے آخری چند سوالوں سے ظاہر ہوگا۔

سوالات (۵)

(۱) ثابت کرو کہ $\text{جم}\,\frac{۲\pi}{۷}$ ، $\text{جم}\,\frac{۴\pi}{۷}$ ، $\text{جم}\,\frac{۶\pi}{۷}$ مساوات $۸\,\text{لا}^{۳} + ۴\,\text{لا}^{۲} - ۴\,\text{لا} - ۱ = ۰$ کی اصلیں ہیں۔

چونکہ جم ۷ ط = ۶۴ جم^{۷} ط - ۱۱۲ جم^{۵} ط + ۵۶ جم^{۳} ط - ۷ جم ط

جم ۷ ط = ۱ اور جم ط = لا لکھنے سے

مساوات ۶۴ لا^{۷} - ۱۱۲ لا^{۵} + ۵۶ لا^{۳} - ۷ لا - ۱ = ۰

کی اصلیں ۱، جم $\frac{۲\pi}{۷}$ ، جم $\frac{۴\pi}{۷}$ ...... جم $\frac{۱۲\pi}{۷}$ ہیں۔

معہذا، جم $\frac{۲\pi}{۷}$ = جم $\frac{۱۲\pi}{۷}$ ، جم $\frac{۴\pi}{۷}$ = جم $\frac{۱۰\pi}{۷}$ اور جم $\frac{۶\pi}{۷}$ = جم $\frac{۸\pi}{۷}$

لیکن ۶۴ لا^{۷} - ۱۱۲ لا^{۵} + ۵۶ لا^{۳} - ۷ لا - ۱ = (لا - ۱) (۸ لا^{۳} + ۴ لا^{۲} - ۴ لا - ۱)^{۲}

پس مساوات ۸ لا^{۳} + ۴ لا^{۲} - ۴ لا - ۱ = ۰ کی اصلیں

جم $\frac{۲\pi}{۷}$ ، جم $\frac{۴\pi}{۷}$ اور جم $\frac{۶\pi}{۷}$ ہیں

(۲) ثابت کرو کہ ۱۶ جم ع جم ۲ع جم ۳ع جم ۴ع = ۱ جس میں ع = $\frac{\pi}{۹}$

(۳) ثابت کرو کہ ۸ جب $\frac{\pi}{۷}$ جب $\frac{۲\pi}{۷}$ جب $\frac{۳\pi}{۷}$ = $\sqrt{۷}$

چونکہ جب ۷ ط = ۷ جب ط - ۵۶ جب^{۳} ط + ۱۱۲ جب^{۵} ط - ۶۴ جب^{۷} ط

جب ۷ ط = ۰ لکھنے سے مساوات ۶۴ لا^{۷} - ۱۱۲ لا^{۵} + ۵۶ لا^{۳} - ۷ لا = ۰

کی اصلیں ۰، ± جب $\frac{\pi}{۷}$ ، ± جب $\frac{۲\pi}{۷}$ ، ± جب $\frac{۳\pi}{۷}$ ہوتی ہیں۔

پس جب^{۲} $\frac{\pi}{۷}$ جب^{۲} $\frac{۲\pi}{۷}$ جب^{۲} $\frac{۳\pi}{۷}$ = $\frac{۷}{۶۴}$

اور ۸ جب $\frac{\pi}{۷}$ جب $\frac{۲\pi}{۷}$ جب $\frac{۳\pi}{۷}$ = $\sqrt{۷}$

اس میں مثبت علامت لی گئی ہے اس لیے کہ حاصل ضرب مثبت ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ مس $\frac{\pi}{۱۱}$ مس $\frac{۲\pi}{۱۱}$ مس $\frac{۳\pi}{۱۱}$ مس $\frac{۴\pi}{۱۱}$ مس $\frac{۵\pi}{۱۱}$ = $\sqrt{۱۱}$

چونکہ مس ۱۱ ط = $\dfrac{\text{۱۱ مس ط} - \frac{۹\times۱۰\times۱۱}{۳\times۲\times۱}\text{ مس}^{۳}\text{ ط} + \ldots\ldots - \text{مس}^{۱۱}\text{ ط}}{۱ - \frac{۱۰\times۱۱}{۲\times۱}\text{ مس}^{۲}\text{ ط} + \ldots\ldots - \text{۱۱ مس}^{۱۰}\text{ ط}}$

اگر مس ۱۱ ط = ۰ لکھیں تو مساوات ۱۱ مس ط - $\frac{۱۱ \times ۱۰ \times ۹}{۳ \times ۲ \times ۱}$ مس^{۳} ط + ... - مس^{۱۱} ط = ۰

کی اصلیں ۰، ± مس $\frac{\pi}{۱۱}$، ± مس $\frac{۲\pi}{۱۱}$، ± مس $\frac{۳\pi}{۱۱}$، ± مس $\frac{۴\pi}{۱۱}$، ± مس $\frac{۵\pi}{۱۱}$ ہوتی ہیں۔

∴ مس^{۲} $\frac{\pi}{۱۱}$ مس^{۲} $\frac{۲\pi}{۱۱}$ ..... مس^{۲} $\frac{۵\pi}{۱۱}$ = ۱۱

پس مس $\frac{\pi}{۱۱}$ مس $\frac{۲\pi}{۱۱}$ ..... مس $\frac{۵\pi}{۱۱}$ = $\sqrt{۱۱}$

(۵) ثابت کرو کہ ۲ جم $\frac{\pi}{۷}$ مساوات لا^{۳} - لا^{۲} - ۲لا + ۱ = ۰ کی ایک اصل ہے۔ اور بقیہ اصلیں کیا ہیں بتاؤ۔

(۶) ثابت کرو کہ لا = ۲ جم $\frac{۲\pi}{۹}$ مساوات لا^{۶} - ۶لا^{۴} + ۹لا^{۲} - ۱ = ۰ کی ایک اصل ہے۔ بقیہ اصلیں بتائی جائیں۔

[ہدایت - $\frac{\text{جب ۹ ط}}{\text{جب ط}}$ کو جیوب التمام کے سلسلہ میں پھیلاؤ اور پھر جب ۹ ط = ۰]

(۷) ثابت کرو کہ مساوات لا^{۳} - ۲۱ لا^{۲} + ۳۵ لا - ۷ = ۰ کی اصلیں مس^{۲} $\frac{\pi}{۷}$، مس^{۲} $\frac{۲\pi}{۷}$ اور مس^{۲} $\frac{۳\pi}{۷}$ ہیں اور اس کی مدد سے بتاؤ کہ قط^{۴} $\frac{\pi}{۷}$ + قط^{۴} $\frac{۲\pi}{۷}$ + قط^{۴} $\frac{۳\pi}{۷}$ = ۴۱۶

۵۰ - جم^{ن} ط کا اظہار ط کے ضعفوں کی جیوب التمام کے سلسلہ میں جبکہ ط ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

اگر ہم لکھیں جم ط + خ جب ط = لا

تو جم ط - خ جب ط = لا$^{-۱}$

اور جم ن ط + خ جب ن ط = لا^{ن} ، جم ن ط - خ جب ن ط = لا$^{-ن}$

پس ۲ جم ط = لا + لا$^{-۱}$ اور ۲ خ جب ط = لا - لا$^{-۱}$

۲ جم ن ط = لا^{ن} + لا$^{-ن}$ اور ۲ خ جب ن ط = لا^{ن} - لا$^{-ن}$

اس لیے $(۲ \text{ جم ط})^{ن} = (\text{لا} + \text{لا}^{-۱})^{ن} = \text{لا}^{ن} + ن\ \text{لا}^{ن-۲} + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} \text{لا}^{ن-۴} + \dots + \text{لا}^{-ن}$

$$= (\text{لا}^{ن} + \text{لا}^{-ن}) + ن\,(\text{لا}^{ن-۲} + \text{لا}^{-ن+۲}) + \dots$$

$$= ۲ \text{ جم ن ط} + ۲ن \text{ جم} (ن-۲) \text{ط} + \frac{۲ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} \text{ جم} (ن-۴) \text{ط} + \dots$$

$$\therefore\ ۲^{ن-۱} \text{ جم}^{ن} \text{ط} = \text{جم ن ط} + ن \text{ جم} (ن-۲) \text{ط} + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} \text{ جم} (ن-۴) \text{ط} + \dots$$

اگر ن طاق عدد ہے تو $(\text{لا} + \text{لا}^{-۱})^{ن}$ کے پھیلاؤ کے جملہ میں رقموں کی تعداد جفت ہے اور یہ رقمیں جوڑواں ترتیب دی جاسکتی ہیں۔ چنانچہ سلسلہ کی آخری رقم جم ط ہوگی۔

اگر ن جفت عدد ہے تو پھیلاؤ کے جملہ میں رقموں کی تعداد طاق ہے۔ پس جملہ کے دونوں سروں سے جوڑواں رقمیں ترتیب دینے سے بیچ کی رقم اکیلی رہ جائیگی اور اس میں لا موجود نہ ہوگا۔ اس صورت میں $۲^{ن} \text{ جم}^{ن} \text{ط}$ کے پھیلاؤ کی آخری رقم ط سے آزاد ہوگی اور ظاہر ہے کہ سلسلہ کی دیگر رقموں کی طرح اس کا جزوضربی ۲ نہ ہوگا۔ $\text{جب}^{ن} \text{ط}$ کا پھیلاؤ بھی اسی طرح حاصل ہوسکتا ہے۔ بجالیکہ ن جفت عدد ہوگا پھیلاؤ جم ن ط، جم (ن-۲) ط، وغیرہ کی رقموں میں ہوگا۔ اور جب ن طاق عدد ہوگا تو پھیلاؤ جب ن ط، جب (ن-۲) ط، وغیرہ کی رقموں میں ہوگا۔

مثالیں۔

(۱)
$$۲^{۵} \text{ جم}^{۶} \text{ط} = \text{جم ۶ ط} + ۶ \text{ جم ۴ ط} + ۱۵ \text{ جم ۲ ط} + ۱۰$$
$$۲^{۵} \text{ جب}^{۶} \text{ط} = -\text{جب ۶ ط} + ۶ \text{ جب ۴ ط} - ۱۵ \text{ جب ۲ ط} + ۱۰$$

(۲)
$$۲^{۶} \text{ جم}^{۷} \text{ط} = \text{جم ۷ ط} + ۷ \text{ جم ۵ ط} + ۲۱ \text{ جم ۳ ط} + ۳۵ \text{ جم ط}$$
$$۲^{۶} \text{ جب}^{۷} \text{ط} = -\text{جب ۷ ط} + ۷ \text{ جب ۵ ط} - ۲۱ \text{ جب ۳ ط} + ۳۵ \text{ جب ط}$$

(۳) اگر ن جفت عدد ہو تو

$$۲^{ن-۱} (-۱)^{\frac{ن}{۲}} \text{ جب}^{ن} \text{ط} = \text{جم ن ط} - ن \text{ جم} (ن-۲) \text{ط} + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} \text{ جم} (ن-۴) \text{ط} - \dots + \frac{۱}{۲} (-۱)^{\frac{ن}{۲}} \frac{\lfloor ن}{۲\{\lfloor \frac{ن}{۲}\}^{۲}}$$

(۴) اگر ن طاق عدد ہو تو

$۲^{ن-۱}(-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}}$ جب^{ن} ط = جب ن ط - ن جب (ن - ۲) ط + $\frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲}$ جب (ن - ۴) ط ......

$+ (-۱)^{\frac{ن-۱}{۲}} \frac{\lfloor ن}{\lfloor \frac{ن-۱}{۲} \lfloor \frac{ن+۱}{۲}}$ جب ط

(۵) ثابت کرو کہ $۲^{۶}$ جم^{۳} ط جب^{۴} ط = جم ۷ ط - جم ۵ ط - ۳ جم ۳ ط + ۳ جم ط

۵۱ - جم ن ط کے اجزائے ضربی -

ہم نے فصل (۴۶) میں دیکھا ہے کہ

جم ن ط = جم^{ن} ط - $\frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲}$ جم$^{ن-۲}$ ط جب^{۲} ط + ...

اور اس لیے جم ن ط، بلحاظ جم ط ن - ویں درجہ کا ایک کثیر رقمی (Polynomial) جملہ ہے -

معہذا جم^{ن} ط والی رقم $۲^{ن-۱}$ جم^{ن} ط ہے اِس لیے کہ اس سلسلہ کو از سرِ نو ترتیب دینے اور جب^{۲} ط کے عوض ۱ - جم^{۲} ط لکھنے سے اس کا سر

۱ + $\frac{ن(ن-۱)}{۱ \times ۲}$ + $\frac{ن(ن-۱)(ن-۲)(ن-۳)}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴}$ + ... یعنی $\frac{۱}{۲}\{(۱+۱)^{ن} + (۱-۱)^{ن}\}$ یا $۲^{ن-۱}$

ہو جاتا ہے - پس

جم ن ط = $۲^{ن-۱}$ (جم ط - جم ع$_{۱}$) (جم ط - جم ع$_{۲}$) ..... (جم ط - جم ع$_{ن}$)

جس میں جم ع$_{۱}$، جم ع$_{۲}$، ..... جم ع$_{ن}$، جم ط کی وہ ن قیمتیں ہیں جو جم ط کے اس ن - ویں درجہ کے جملہ کو صفر بنا دیتی ہیں - لیکن

جم ن ط = ۰ جبکہ ط = $\frac{\pi}{۲ن}$، $\frac{۳\pi}{۲ن}$، $\frac{۵\pi}{۲ن}$ ...... (۲ن - ۱) $\frac{\pi}{۲ن}$،

اور ان تمام زاویوں کے جیوب التمام مختلف ہیں -

پس

$$\text{جم ن ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جم ط} - \text{جم}\,\frac{\pi}{۲\text{ن}}\right)\left(\text{جم ط} - \text{جم}\,\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\right)\ldots\times\left(\text{جم ط} - \text{جم}\,\frac{(۲\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}}\right)$$

ہم اِن کو از سرِ نو جوڑوں ترتیب دے کر لکھ سکتے ہیں، جبکہ ن ایک طاق عدد ہے،

$$\text{جم ن ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\,\frac{\pi}{۲\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\,\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\right)\ldots\ldots$$

$$\times\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\,\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}\right)\text{جم ط}،$$

اور اگر ن ایک جفت عدد ہے تو

$$\text{جم ن ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\,\frac{\pi}{۲\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\,\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\right)\ldots\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\,\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}}\right)$$

یہ جملے اس طرح بھی لکھے جا سکتے ہیں:

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جب}^۲\,\frac{\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\left(\text{جب}^۲\,\frac{۳\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\ldots\ldots$$

$$\times\left(\text{جب}^۲\,\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)$$

جبکہ ن طاق عدد ہے۔

اور

$$\text{جم ن ط} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جب}^۲\,\frac{\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\left(\text{جب}^۲\,\frac{۳\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\ldots\ldots$$

$$\times\left(\text{جب}^۲\,\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)$$

جبکہ ن جفت ہے

اگر ط ← ۰ تو

$$۲^{\frac{(\text{ن}-۱)}{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{۲\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\ldots\ldots\text{جب}\,\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}} = ۱$$

جبکہ ن طاق عدد ہے۔

اور

$$۲^{\frac{(\text{ن}-۱)}{۲}}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{۲\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}\ldots\ldots\text{جب}\,\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}} = ۱$$

جبکہ ن جفت عدد ہے۔

جذر المربع مثبت لیا جاتا ہے اس لیے $\frac{\pi}{۲\text{ن}}$ ، $\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}$ ..... سب $\frac{\pi}{۲}$ سے کمتر ہیں۔
ان جملوں کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{\text{جم ن ط}}{\text{جم ط}} = \left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲\text{ن}}}\right)\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}}\right)\cdots\cdots\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}}\right)$$

جبکہ ن طاق عدد ہے، اور

$$\text{جم ن ط} = \left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{۲\text{ن}}}\right)\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{۳\pi}{۲\text{ن}}}\right)\cdots\cdots\left(۱ - \frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}}}\right)$$

جبکہ ن جفت عدد ہے۔

۵۲- جب ن ط کے اجزائے ترکیبی کی تعیین —

فصل (۴۶) میں ہم نے دیکھا تھا کہ $\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = \text{ن جم}^{\text{ن}-۱}\text{ط} - \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{۳\times۲\times۱}\text{جب}^۲\text{ط جم}^{\text{ن}-۳}\text{ط} + \cdots$
اور سابقہ فصل میں جیسا کہ بتایا گیا تھا اسی طرح بتایا جا سکتا ہے کہ جب^۲ ط کے عوض
۱ - جم^۲ ط لکھنے سے جم$^{\text{ن}-۱}$ ط کا سر $۲^{\text{ن}-۱}$ ہے۔

پس، مثل سابق، $\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\cdots\cdots\left(\text{جم ط} - \text{جم}\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right)$

ان کو از سر نو جوڑواں ترتیب دینے سے

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جم ط}\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\cdots\cdots\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}\right)$$

جبکہ ن جفت عدد ہے، اور

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}\right)\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\cdots\cdots\left(\text{جم}^۲\text{ط} - \text{جم}^۲\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}}\right)$$

جبکہ ن طاق عدد ہے۔

ان جملوں کو ہم بدل کر مکرر لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جم ط}\left(\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\left(\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\cdots\left(\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)$$

جبکہ ن جفت عدد ہے، اور

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = ۲^{\text{ن}-۱}\left(\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)\left(\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}} - \text{جب ط}\right)\cdots\left(\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}} - \text{جب}^۲\text{ط}\right)$$

جبکہ ن طاق عدد ہے۔

$$\text{لیکن}\quad \frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}} = \text{ن}\left(\frac{\text{جب ن ط}}{\text{ن ط}}\right)\left(\frac{\text{ط}}{\text{جب ط}}\right)$$

$$\therefore \lim_{\text{ط}\to ۰}\left(\frac{\text{جب ن ط}}{\text{جب ط}}\right) = \text{ن}\lim_{\text{ط}\to ۰}\left(\frac{\text{جب ن ط}}{\text{ن ط}}\right)\lim_{\text{ط}\to ۰}\left(\frac{\text{ط}}{\text{جب ط}}\right) = \text{ن}$$

اگر مندرجۂ بالا نتیجوں میں ط ← ۰، تو

$$\sqrt{\text{ن}} = ۲^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{جب}\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جب}\frac{۲\pi}{\text{ن}}\cdots\text{جب}\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}$$

جبکہ ن جفت عدد ہے، اور

$$\sqrt{\text{ن}} = ۲^{\frac{\text{ن}-۱}{۲}}\,\text{جب}\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جب}\frac{۲\pi}{\text{ن}}\cdots\text{جب}\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}$$

جبکہ ن طاق عدد ہے۔

جذر المربع کی علامت مثبت لی جاتی ہے اس لیے کہ تمام جیبیں مثبت ہیں۔

$$\text{پس}\quad \frac{\text{جب ن ط}}{\text{ن جب ط}} = \text{جم ط}\left(۱-\frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(۱-\frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(۱-\frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۲)\pi}{۲\text{ن}}}\right)،$$

جبکہ ن جفت عدد ہے، اور

$$\frac{\text{جب ن ط}}{\text{ن جب ط}} = \left(۱-\frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{\pi}{\text{ن}}}\right)\left(۱-\frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{۲\pi}{\text{ن}}}\right)\cdots\left(۱-\frac{\text{جب}^۲\text{ط}}{\text{جب}^۲\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{۲\text{ن}}}\right)،$$

جبکہ ن طاق عدد ہے۔

۵۳۔ اِکائی کی ن اصلوں کی تعیین جبکہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ بالفاظِ دیگر مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} = ۱$ کا حل۔

چونکہ جم ۲π + خ جب ۲π = ۱

لہٰذا لا^ن = جم ۲π + خ جب ۲π پس فصل (۴۵) کی رُو سے

لا = جم ۲(ر+۱)π/ن + خ جب ۲(ر+۱)π/ن جس میں ر = ۰، ۱، ن-۱

∴ لا = جم ۲رπ/ن + خ جب ۲رπ/ن جس میں ر = ۱، ۲، ... ن

بحالیکہ ن ایک جفت مثبت صحیح عدد ۲ف ہے، تو

لا = جم رπ/ف + خ جب رπ/ف جس میں ر = ۱، ۲، .... ۲ف -

ر کی قیمت = ف تو لا = -۱ اور ر کی قیمت = ۲ف تو لا = +۱

ر کی قیمت = س تو لا = جم سπ/ف + خ جب سπ/ف

اور ر کی قیمت = ۲ف - س تو لا = جم سπ/ف - خ جب سπ/ف،

س کی قیمتیں اب ۱، ۲، .....، ف-۱ ہونگی۔

بحالیکہ ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ۲ف + ۱ ہے، تو

لا = جم ۲رπ/(۲ف+۱) + خ جب ۲رπ/(۲ف+۱)، جس میں ر = ۱، ۲، .....، ۲ف + ۱۔

ر کی قیمت = ۲ف + ۱ تو لا = ۱

لا کی بقیہ قیمتیں جوڑواں ترتیب دی جاسکتی ہیں اور ر = ۱، ۲، ...، ف کے لیے

لا = جم ۲رπ/(۲ف+۱) ± خ جب ۲رπ/(۲ف+۱) دیتی ہیں۔

اس سے بطور نتیجۂ صریح مستخرج ہوتا ہے کہ لا^۲ف - ا^۲ف کے اجزائے ضربی

(لا^۲ - ا^۲)(لا^۲ - ۲ ا لا جم π/ف + ا^۲)(لا^۲ - ۲ ا لا جم ۲π/ف + ا^۲) .... (لا^۲ - ۲ ا لا جم (ف-۱)π/ف + ا^۲) ہیں

اور لا^(۲ف+۱) - ا^(۲ف+۱) کے اجزائے ضربی،

(لا - ا)(لا^۲ - ۲ ا لا جم ۲π/(۲ف+۱) + ا^۲)(لا^۲ - ۲ ا لا جم ۴π/(۲ف+۱) + ا^۲) ..... (لا^۲ - ۲ ا لا جم ۲فπ/(۲ف+۱) + ا^۲) ہیں

سوالات ۵ (ھ)

(۱) مساوات $\text{لا}^{۳} = \text{ا}^{۳}$ کو حل کرو۔

چونکہ $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{۳} = ۱$ لہذا $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{جم}\ \frac{۲\text{ر}\pi}{۳} + \text{خ جب}\ \frac{۲\text{ر}\pi}{۳}$، (جس میں ر = ۱، ۲، ۳)

(۲) مساوات $\text{لا}^{۴} = \text{ا}^{۴}$ کو حل کرو۔

چونکہ $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{۴} = ۱$ لہذا $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \text{جم}\ \frac{\text{ر}\pi}{۲} + \text{خ جب}\ \frac{\text{ر}\pi}{۲}$، (جس میں ر = ۱، ۲، ۳، ۴)

$= \text{جم}\ \frac{\text{ر}\pi}{۲} \pm \text{خ جب}\ \frac{\text{ر}\pi}{۲}$، (جس میں ر = ۱، ۲)

(۳) ثابت کرو کہ اگر ن ایک مفرد عدد ہے اور ع، اکائی کی خیالی ن ۔ ویں اصلوں میں سے ایک اصل ہے تو بقیہ اصلیں $\text{ع}^{۲}$، $\text{ع}^{۳}$، ..... $\text{ع}^{\text{ن}}$ ہونگی۔

۴۵۔ مساوات $\text{لا}^{\text{ن}} + ۱ = ۰$ کا حل جبکہ ن کوئی سا مثبت صحیح عدد ہے۔

یہاں $\text{لا}^{\text{ن}} = -۱ = \text{جم}\ \pi + \text{خ جب}\ \pi$

$\therefore$ لا کی ن قیمتیں $\text{جم}\ (۲\text{ر}+۱)\frac{\pi}{\text{ن}} + \text{خ جب}\ (۲\text{ر}+۱)\frac{\pi}{\text{ن}}$ ہیں،

جس میں ر = ۰، ۱، ......، ن - ۱۔

بحالیکہ ن ایک جفت مثبت صحیح عدد ۲ف ہے، تمام اصلیں خیالی ہوتی ہیں اور اُن کی تعبیر

$\text{جم}\left(\frac{۲\text{ر}+۱}{۲\text{ف}}\right)\pi \pm \text{خ جب}\left(\frac{۲\text{ر}+۱}{۲\text{ف}}\right)\pi$ سے ہوتی ہے،

جس میں ر = ۰، ۱، ....، ف - ۱۔

بحالیکہ ن ایک طاق مثبت صحیح عدد ۲ف + ۱ ہے، صرف ر = ف کے تناظر اصل حقیقی ہے بقیہ اصلیں خیالی ہیں۔

پس اس صورت میں $\text{لا} = \text{جم}\ \frac{۲\text{ر}+۱}{۲\text{ف}+۱}\pi \pm \text{خ جب}\ \frac{۲\text{ر}+۱}{۲\text{ف}+۱}\pi$

ر = ۰، ۱، ....، ف - ۱ کے لیے اور لا = -۱، ر = ف کے لیے۔

نتیجہ صریح ۔ $\text{لا}^{۲\text{ف}} + \text{ا}^{۲\text{ف}}$ کے اجزائے ضربی۔

$\left(\text{لا}^{۲} - ۲\text{ا لا جم}\ \frac{\pi}{۲\text{ف}} + \text{ا}^{۲}\right)\left(\text{لا}^{۲} - ۲\text{ا لا جم}\ \frac{۳\pi}{۲\text{ف}} + \text{ا}^{۲}\right)\ldots\left(\text{لا}^{۲} - ۲\text{ا لا جم}\ \frac{۲\text{ف}-۱}{۲\text{ف}}\pi + \text{ا}^{۲}\right)$ ہیں

اور $\text{لا}^{۲\text{ف}+۱} + \text{ا}^{۲\text{ف}+۱}$ کے اجزائے ضربی۔

(لا + ر)(لا^{۲} − ۲ ر لا جم $\frac{\pi}{۲ف+۱}$ + ر^{۲})(لا^{۲} − ۲ ر لا جم $\frac{۳\pi}{۲ف+۱}$ + ر^{۲})……(لا^{۲} − ۲ ر لا جم $\frac{۲ف-۱}{۲ف+۱}\pi$ + ر^{۲}) ہیں۔

سوالات ۵ (و)

(۱) مساوات لا^{۴} + ر^{۴} = ۰ کو حل کرو۔

چونکہ ($\frac{لا}{ر}$)^{۴} = −۱ = جم π + خ جب π

∴ $\frac{لا}{ر}$ = جم $\frac{۲ر+۱}{۴}$π + خ جب $\frac{۲ر+۱}{۴}$π (ر = ۰، ۱، ۲، ۳)

∴ $\frac{لا}{ر}$ = ± جم $\frac{\pi}{۴}$ ± خ جب $\frac{\pi}{۴}$

(۲) مساوات لا^{۵} + ر^{۵} = ۰ کو حل کرو۔

چونکہ ($\frac{لا}{ر}$)^{۵} = −۱ = جم π + خ جب π

∴ $\frac{لا}{ر}$ = جم $\frac{۲ر+۱}{۵}$π + خ جب $\frac{۲ر+۱}{۵}$π، (ر = ۰، ۱، ۲، ۳، ۴)

∴ $\frac{لا}{ر}$ = جم $\frac{\pi}{۵}$ ± خ جب $\frac{\pi}{۵}$، ر = ۰ اور ۴ کے لیے

= جم $\frac{۳\pi}{۵}$ ± خ جب $\frac{۳\pi}{۵}$، ر = ۱ اور ۳ کے لیے

اور = −۱، ر = ۲ کے لیے

(۳) مساوات لا^{۶} + لا^{۴} + لا^{۲} + ۱ = ۰ کو حل کرو۔

۵۵۔ لا^{۲ن} − ۲ ر^{ن} لا^{ن} جم ن عہ + ر^{۲ن} = ۰ کا حل جبکہ ن کوئی سا مثبت صحیح عدد ہے۔

چونکہ لا^{۲ن} − ۲ ر^{ن} لا^{ن} جم ن عہ + ر^{۲ن} = ۰

∴ (لا^{ن} − ر^{ن} جم ن عہ)^{۲} + ر^{۲ن} جب^{۲} ن عہ = ۰

∴ لا^{ن} − ر^{ن} جم ن عہ = ± ر^{ن} خ جب ن عہ

∴ لا^{ن} = ر^{ن} (جم ن عہ ± خ جب ن عہ)

پس لا کی ۲ ن قیمتیں $\text{لا} = \text{ا}\left(\text{جم}\,\frac{\text{ن عہ} + \text{۲ ر}\pi}{\text{ن}} \pm \text{خ جب}\,\frac{\text{ن عہ} + \text{۲ ر}\pi}{\text{ن}}\right)$ ہیں،

جس میں ر = ۰، ۱، ..... ن - ۱۔

ان کو جوڑ واں ترتیب دے سکتے ہیں اور اِس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ

$$\text{لا}^{\text{۲ن}} - \text{۲ ا}^{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم ن عہ} + \text{ا}^{\text{۲ن}}$$ کے دو درجی اجزائے ضربی،

$$(\text{لا}^{۲} - \text{۲ ا لا جم عہ} + \text{ا}^{۲})\left\{\text{لا}^{۲} - \text{۲ ا لا جم}\left(\text{عہ} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right) + \text{ا}^{۲}\right)\ldots\ldots$$

$$\left\{\text{لا}^{۲} - \text{۲ ا لا جم}\left(\text{عہ} + \frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right) + \text{ا}^{۲}\right)\Big\}$$ ہیں۔

اس لیے کہ یہ اجزائے ضربی $= \left(\text{لا} - \text{ا جم}\,\frac{\text{ن عہ} + \text{۲ ر}\pi}{\text{ن}} - \text{خ ا جب}\,\frac{\text{ن عہ} + \text{۲ ر}\pi}{\text{ن}}\right) \times$

$\left(\text{لا} - \text{ا جم}\,\frac{\text{ن عہ} + \text{۲ ر}\pi}{\text{ن}} + \text{خ ا جب}\,\frac{\text{ن عہ} + \text{۲ ر}\pi}{\text{ن}}\right)$ جس میں ر = ۰، ۱، .... ن - ۱۔

اس ضابطہ سے بعض اہم نتائج حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ چنانچہ

(۱) لا = ۱ لکھو اور عہ کے بجائے طہ لکھو، تب

$$(\text{۱ - جم ن طہ}) = ۲^{\text{ن}-۱}(\text{۱ - جم طہ})\left\{\text{۱ - جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\right\}\ldots\left\{\text{۱ - جم}\left(\text{طہ} + \frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right)\right\}$$

اگر ہم یہاں بجائے طہ کے ۲ طہ لکھیں تو

$$\text{جب}^{۲}\,\text{ن طہ} = ۲^{\text{۲ن}-۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{طہ جب}^{۲}\left(\text{طہ} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\ldots\text{جب}^{۲}\left(\text{طہ} + \frac{(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right)$$

یا $$\text{جب ن طہ} = \pm ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب طہ جب}\left(\text{طہ} + \frac{\pi}{\text{ن}}\right)\ldots\text{جب}\left(\text{طہ} + \frac{(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right)$$

جس کی مبہم علامت کا ہنوز تصفیہ ہونا ہے۔

لیکن اگر ہم جب طہ پر تقسیم کریں اور پھر طہ ← ۰ ہونے دیں، تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ن} = \pm ۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}\,\frac{\pi}{\text{ن}}\,\text{جب}\,\frac{۲\pi}{\text{ن}}\ldots\ldots\text{جب}\,\frac{(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}$$

اجزائے ضربی جب $\frac{\pi}{ن}$، جب $\frac{۲\pi}{ن}$ ، ..... جب $\frac{(ن-۱)\pi}{ن}$ ، سب کے سب مثبت ہیں، پس یہاں مثبت علامت لی جائیگی۔

$$\text{لہٰذا}\quad جب\, ن\, ط = ۲^{ن-۱}\, جب\, ط\, جب\left(ط + \frac{\pi}{ن}\right) ..... جب\left(ط + \frac{(ن-۱)\pi}{ن}\right)$$

اب اگر بجائے ط کے $\left(ط + \frac{\pi}{۲ن}\right)$ لکھا جائے تو

$$جم\, ن\, ط = ۲^{ن-۱}\, جب\left(ط + \frac{\pi}{۲ن}\right) جب\left(ط + \frac{۳\pi}{۲ن}\right) ..... جب\left(ط + \frac{(۲ن-۱)\pi}{۲ن}\right)$$

(ب) $لا = ا\,(جم\, ط + خ\, جب\, ط)$ لکھو۔

تب چونکہ $لا^{۲ن} - ۲\, ا^{ن}\, لا^{ن}\, جم\, ن\, ع + ا^{۲ن}$

$$= ا^{۲ن}\,(جم\, ۲ن\, ط + خ\, جب\, ۲ن\, ط + ۱) - ۲\, ا^{۲ن}\,(جم\, ن\, ط + خ\, جب\, ن\, ط)\, جم\, ن\, ع$$

$$= ا^{۲ن}\,(۲\, جم^{۲}\, ن\, ط + ۲\, خ\, جب\, ن\, ط\, جم\, ن\, ط) - ۲\, ا^{۲ن}\,(جم\, ن\, ط + خ\, جب\, ن\, ط)\, جم\, ن\, ع$$

$$= ۲\, ا^{۲ن}\,\{جم\, ن\, ط\,(جم\, ن\, ط + خ\, جب\, ن\, ط) - جم\, ن\, ع\,(جم\, ن\, ط + خ\, جب\, ن\, ط)\}$$

$$= ۲\, ا^{۲ن}\,(جم\, ن\, ط + خ\, جب\, ن\, ط)\,(جم\, ن\, ط - جم\, ن\, ع)$$

اور $لا^{۲} - ۲\, ا\, لا\, جم\, ع + ا^{۲} = ا^{۲}\,(جم\, ۲ط + خ\, جب\, ۲ط + ۱) - ۲\, ا^{۲}\,(جم\, ط + خ\, جب\, ط)\, جم\, ع$

$$= ۲\, ا^{۲}\,(جم^{۲}\, ط + خ\, جم\, ط\, جب\, ط) - ۲\, ا^{۲}\,(جم\, ط + خ\, جب\, ط)\, جم\, ع$$

$$= ۲\, ا^{۲}\,(جم\, ط + خ\, جب\, ط)\,(جم\, ط - جم\, ع)$$

اسی طرح $لا^{۲ن} - ۲\, ا^{ن}\, لا^{ن}\, جم\, ن\, ع + ا^{۲ن}$ کے دوسرے اجزائے ضربی بھی مصرحۂ بالا جملوں کے مشابہ لکھے جا سکتے ہیں۔

پس بالآخر

$$جم\, ن\, ط - جم\, ن\, ع = ۲^{ن-۱}\,(جم\, ط - جم\, ع)\left\{جم\, ط - جم\left(ع + \frac{۲\pi}{ن}\right)\right\} .... \left\{جم\, ط - جم\left(ع + \frac{۲(ن-۱)\pi}{ن}\right)\right\}$$

اس تماثل میں بجائے ط اور ع کے $\frac{۱}{۲}\pi + ط$ اور $\frac{۱}{۲}\pi + ع$ لکھو

تب اگر ن جفت عدد ہے تو

$$جم\, \frac{ن\pi}{۲}\,(جم\, ن\, ط - جم\, ن\, ع) = ۲^{ن-۱}\,(جب\, ط - جب\, ع)\left\{جب\, ط - جب\left(ع + \frac{۲\pi}{ن}\right)\right\} ......$$

$$\left\{جب\, ط - جب\left(ع + \frac{۲(ن-۱)\pi}{ن}\right)\right\}$$

اگر ن طاق عدد ہے تو

جم $\frac{ن \pi}{۲}$ (جم ن طہ ۔ جم ن عہ) کے عوض جب $\frac{ن\pi}{۲}$ (جب ن طہ ۔ جب ن عہ) لکھنا ہوگا۔

۵۶۔ (ا + خ ب) کی ن۔ ویں اصلوں کی تعیین جبکہ ا اور ب حقیقی ہیں۔

فرض کرو ا = ر جم عہ اور ب = ر جب عہ
تاکہ جس نقطہ کے کارٹیزی محدّد ا اور ب ہوں اُس کے قطبی محدد ر اور عہ ہوں جبکہ زاویہ عہ ‎−π‎ اور ‎+π‎ کے مابین لیا جاتا ہے۔

تب ر = $\sqrt{ا^۲ + ب^۲}$ اور مس عہ = $\frac{ب}{ا}$

اس طرح ا + خ ب = ر (جم عہ + خ جب عہ) اور (ا + خ ب) کی ن۔ویں اصلوں کا اظہار جملہ $ر^{\frac{۱}{ن}}$ (جم $\frac{عہ + ۲ ر \pi}{ن}$ + خ جب $\frac{عہ + ۲ ر \pi}{ن}$) سے ہوتا ہے۔

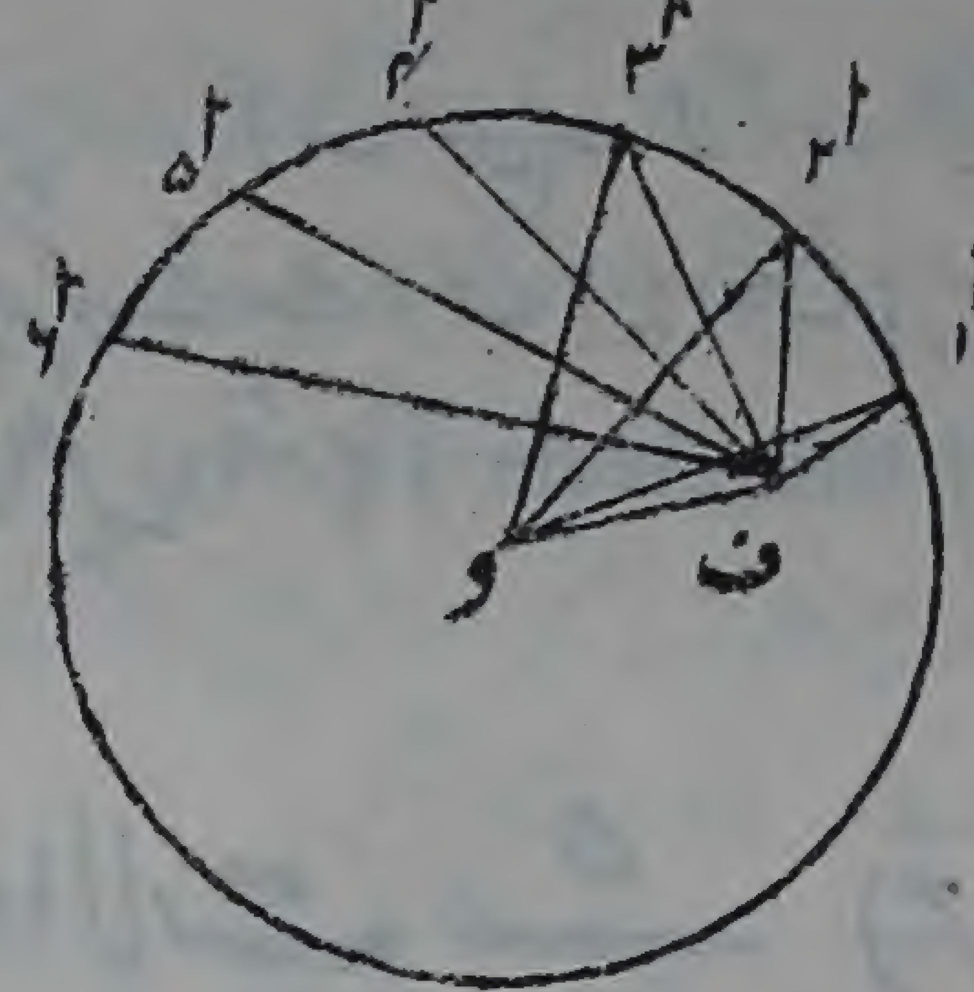
جس میں ر = ۰، ۱، ....، ن ۔ ۱

نوٹ (۱) فرض کرو کہ $ا_۱$، $ا_۲$، .....$ا_ن$، و مرکز اور ا نصف قطر والے دائرہ کے اندر کھینچے ہوئے ن ضلعوں کا منتظم کثیر الاضلاع ہے۔ اور ف دائرہ کے مستوی میں کوئی سا ایک نقطہ ہے جس کا فاصلہ و سے لا ہے۔ اگر زاویہ ف و $ا_۱$ = طہ تو ہم ثابت کریںگے کہ (ف $ا_۱$)^۲ (ف $ا_۲$)^۲ ..... (ف $ا_ن$)^۲

$= لا^{۲ن} - ۲ ا^{ن} لا^{ن}$ جم ن طہ + $ا^{۲ن}$

واضح ہو کہ یہ رابطہ ڈی مواوری خاصیت دائرہ (DeMoivre's property of the circle) کہلاتا ہے۔ اور ۵۵ میں جو ضابطہ $لا^{۲ن} - ۲ ا^{ن} لا^{ن}$ جم ن طہ + $ا^{۲ن}$ کے اجزائے ضربی سے متعلق بتایا گیا تھا اس کی یہ ہندسی ترجمانی ہے۔

شکل کھینچ کر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ زاویہ $ا_۱$ و $ا_۲$ = زاویہ $ا_۲$ و $ا_۳$ = ... = $\frac{۲\pi}{ن}$
اور زاویہ ف و $ا_۲$ = طہ + $\frac{۲\pi}{ن}$، زاویہ ف و $ا_۳$ = طہ + $\frac{۴\pi}{ن}$، ......



(شکلِ خاصیتِ دائرہ)

چونکہ ف ا$_1^2$ = وف^2 + وا$_1^2$ − ۲ (وف) (وا$_1$) جم ف وا$_1$

= لا^2 − ۲ ر لا جم ط + ر^2

ف ا$_2^2$ = وف^2 + وا$_2^2$ − ۲ (وف) (وا$_2$) جم ف وا$_2$

= لا^2 − ۲ ر لا جم (ط + $\frac{2\pi}{ن}$) + ر^2

. . . .

پس (ف ا$_1$)^2 (ف ا$_2$)^2..... (ف ا$_ن$)^2 = لا^{2ن} − ۲ ر^ن لا^ن جم ن ط + ر^{2ن}

نوٹ (۲)- اگر نقطہ ف نصف قطر وا$_1$ پر واقع ہو تو

(ف ا$_1$) (ف ا$_2$) .... (ف ا$_ن$) = لا^ن ∼ ر^ن

حالیہ صورت میں ط = ۰ لہذا (ف ا$_1$)^2 (ف ا$_2$)^2..... (ف ا$_ن$)^2 = لا^{2ن} − ۲ ر^ن لا^ن + ر^{2ن}

= (لا^ن − ر^ن)^2

یعنی (ف ا$_1$) (ف ا$_2$) .... (ف ا$_ن$) = ± (لا^ن − ر^ن) = لا^ن ∼ ر^ن

اگر ف زاویہ ا$_1$ و ا$_2$ کے منصّف پر واقع ہے تو

(ف ا$_1$) (ف ا$_2$) ...... (ف ا$_ن$) = لا^ن + ر^ن

قوسوں ا$_1$ ا$_2$، ا$_2$ ا$_3$ ...... ا$_{ن-1}$ ا$_ن$ کی ع$_1$، ع$_2$، ...... سے تنصیف کرو- اس طرح ا$_1$ ع$_1$ ا$_2$ ع$_2$ .... دائرہ کے اندر ۲ ن ضلعوں کا ایک کثیر الاضلاع بن جاتا ہے- ابھی جو رابطہ ثابت کیا گیا اس کی رُو سے

(ف ا$_1$) (ف ع$_1$) .... (ف ا$_ن$) (ف ع$_ن$) = لا^{2ن} ∼ ر^{2ن}

اسی طرح چونکہ ع$_1$ ع$_2$ .... ع$_ن$، ن ضلعوں کا کثیر الاضلاع ہے -

(ف ع۱) (ف ع۲) ..... (ف عن) = لاⁿ ۔ اⁿ

پس پہلے کو دوسرے پر تقسیم کرنے سے (ف ا۱) (ف ا۲) ....(ف ان) = لاⁿ + اⁿ

واضح ہو کہ یہ رابطے⁽¹⁾ کوٹیز کے خواص دائرہ " (Cotes' properties of the circle) کہلاتے ہیں۔

سوالات ۵ (ض)

(۱) ثابت کرو کہ قط² ط + قط² (ط + π/ن) + ... قط² (ط + (ن-۱)/ن π) = ن² قط² ن ط

یا ن² قم² ن ط بلحاظ اس کے کہ ن طاق عدد ہے یا جفت۔

(۲) اگر لا = جم ع + خ جب ع

ما = جم ب + خ جب ب

ی = جم ج + خ جب ج، تو

(ما + ی) (ی + لا) (لا + ما) = ۸ لا ما ی جم (ب-ج)/۲ جم (ج-ع)/۲ جم (ع-ب)/۲

(۳) اگر جب ا + جب ب + جب ج = ۰

جم ا + جم ب + جم ج = ۰ تو

۳ (ا-ب)، ۳ (ب-ج)، ۳ (ج-ا)، ۲π کے ضعف ہیں۔

اور جم² ا + جم² ب + جم² ج = ۳/۲

(۴) اگر جم ع + جم ب + جم ج + جم ض = ۰

جب ع + جب ب + جب ج + جب ض = ۰، تو

ان دیے ہوئے چار زاویوں میں سے دو ایک دوسرے سے بقدر ایک طاق ضعف π مختلف ہونگے اور بقیہ دو بھی ایک دوسرے سے بقدر ایک طاق ضعف π مختلف ہونگے۔

(۵) لا¹³ - ا کو اس کے اجزائے ضربی میں تحلیل کرو۔

[بتاؤ کہ ۲ جم ۲π/۱۳ + ۲ جم ۱۰π/۱۳، ۲ جم ۴π/۱۳ + ۲ جم ۶π/۱۳، ۲ جم ۸π/۱۳ + ۲ جم ۱۲π/۱۳

مساوات $\text{لا}^{۳} + \text{لا}^{۲} - ۴\,\text{لا} + ۱ = ۰$ کی اصلیں ہیں]

(۶) اگر $\text{ر} = \text{جم}\,\text{ع} + \text{خ}\,\text{جب}\,\text{ع}$ جس میں $\text{ع} = \frac{۲\pi}{۷}$ تو بتاؤ کہ $\text{ر} + \text{ر}^{۶}$، $\text{ر}^{۲} + \text{ر}^{۵}$، $\text{ر}^{۳} + \text{ر}^{۴}$ ایک مکعبی حقیقی صحیح عددی سروں والی مساوات کی اصلیں ہیں۔

(۷) $\text{لا}^{۲\text{ن}} - ۲\,\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{جم}\,\text{ن}\,\text{ط} + ۱$ کو دو درجی اجزائے ضربی میں تحلیل کرو جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے اور بتاؤ کہ

$$\text{جم}\,\frac{\text{ن}\pi}{۲} - \text{جم}\,\text{ن}\left(\text{ف} + \frac{\pi}{۲}\right) =$$

$$۲^{\text{ن}-۱}\,\text{جب}\,\text{ف}\;\text{جب}\left(\text{ف} + \frac{۲\pi}{\text{ن}}\right)\text{جب}\left(\text{ف} + \frac{۴\pi}{\text{ن}}\right) \ldots\ldots \text{جب}\left(\text{ف} + \frac{۲(\text{ن}-۱)\pi}{\text{ن}}\right)$$

(۸) ثابت کرو کہ $\prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ن}-۱}\left(\text{جم}\,\text{ف} - \text{جم}\,\frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right) + \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ن}-۱}\left\{۱ - \text{جم}\left(\text{ف} + \frac{۲\text{ر}\pi}{\text{ن}}\right)\right\} = ۰$

(۹) ثابت کرو کہ $\text{جم}\,\text{ن}\,\text{ط} + \text{جب}\,\text{ن}\,\text{ط} = ۲^{\text{ن}-\frac{۱}{۲}} \prod_{\text{ر}=۰}^{\text{ن}-۱} \text{جب}\left(\text{ط} + \frac{(۴\text{ر}+۱)\pi}{۴\text{ن}}\right)$

چھٹا باب

قایم اور قطبی محدّد۔ اُن کا استحالہ اور خطِ مستقیم کی مساواتیں

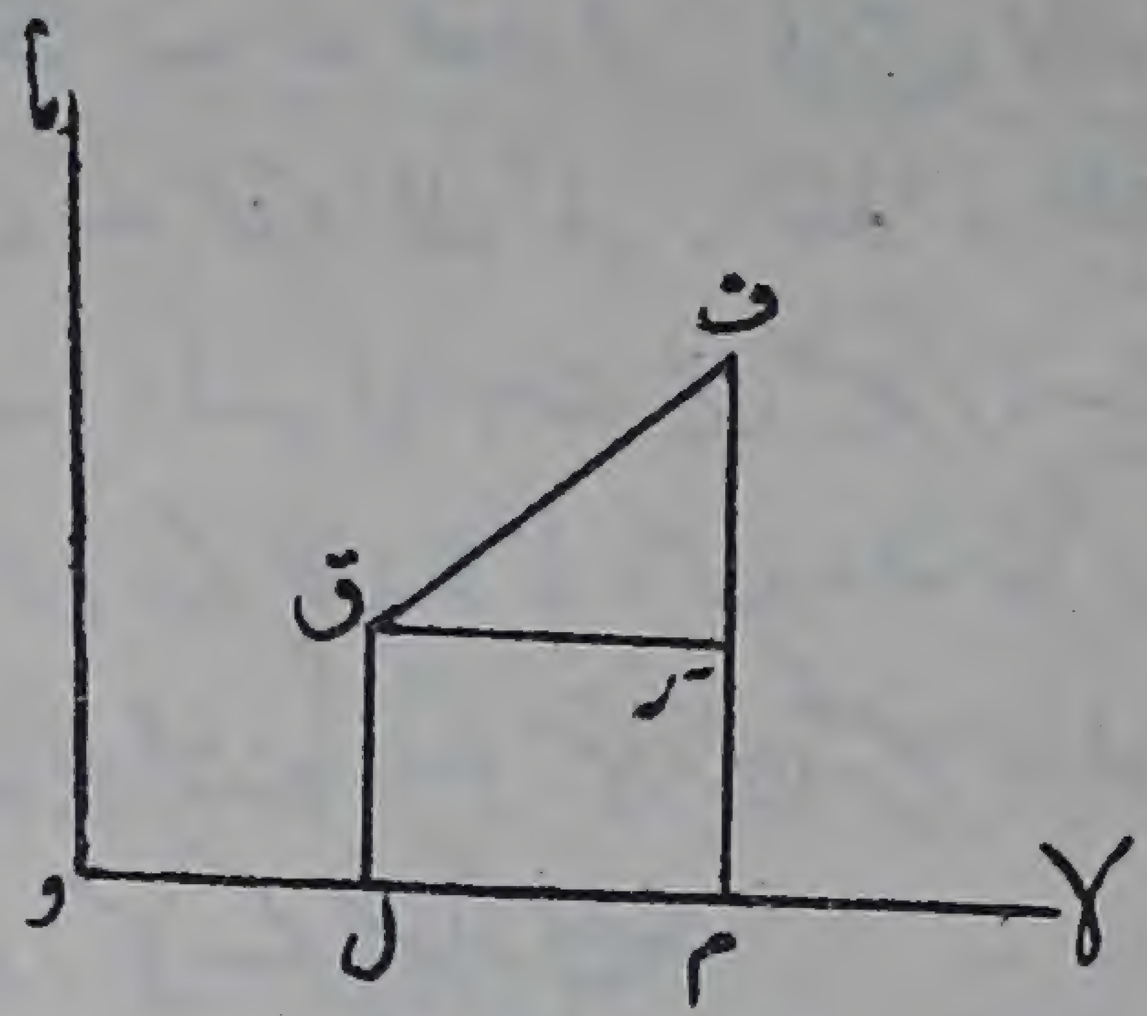
۵۷۔ (ا) محدّدوں کی تعریف۔ اگر و لا اور و ما دو باہم دِگر علی القوائم محور ہیں تو اُن کے مستوی میں کسی نقطۂ پ کے موقع یا محل کی تعیین ان محوروں سے اُن کے فاصلوں کے ذریعہ سے ہو سکتی ہے۔ یہ فاصلے اس نقطہ کے کارٹیزی محدّد (Cartesian co-ordinates) کہلاتے ہیں اور لا، ما سے تعبیر کیے جاتے ہیں۔ ان محوروں کے تقاطع کا نقطہ و مبداء کہلاتا ہے۔ اگر حوالہ کا صرف ایک محور و لا قرار دیا جائے تو نقطہ ف کی تعریف اس کے فاصلہ و ف اور زاویہ لا و ف کے ذریعہ سے ہو سکتی ہے۔ یہ ف کے قطبی محدّد کہلاتے ہیں اور (ر، طہ) سے تعبیر کیے جاتے ہیں۔ ر کو نیم قطرِ سمتی کہتے ہیں اور طہ کو سمتی زاویہ۔

کارٹیزی اور قطبی محدّدوں کے مابین مندرجۂ ذیل روابط واضح ہیں:۔

$$\text{لا} = \text{ر جم طہ}،\quad \text{ما} = \text{ر جب طہ}،\quad \text{ر}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2،\quad \text{مس طہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

ابتداءً کارٹیزی محدّدوں سے بحث کی جائیگی۔ اس کے بعد قطبی محدّدوں سے۔
کارٹیزی محدّدوں کا علی القوائم ہونا لازمی نہیں۔ یہ کسی بھی زاویہ پر مائل ہو سکتے ہیں۔ لیکن عموماً سہولت زاویہ قائمہ ہی کی صورت میں پائی جاتی ہے۔ اِس نصاب میں محوروں کا زاویۂ میلان قائمہ ہی متصور ہوگا۔

(ب) دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ ان کے محددوں کی رقموں میں۔



شکل ۱۰

شکل ۱۰ میں فرض کرو نقطہ ف کے محدد لا$_1$، ما$_1$ ہیں اور نقطۂ ق کے محدد لا$_2$، ما$_2$، ف م اور ق ل محور و ما کے متوازی کھینچو اور ق ر محور و لا کے متوازی۔

تب و ل = لا$_2$، ل ق = ما$_2$،

و م = لا$_1$، م ف = ما$_1$

ف ق^2 = ق ر^2 + ر ف^2

لیکن ق ر = ل م = و م ۔ و ل = لا$_1$ - لا$_2$

اور ر ف = م ف - م ر = م ف - ل ق = ما$_1$ - ما$_2$

∴ ف ق^2 = (لا$_1$ - لا$_2$)^2 + (ما$_1$ - ما$_2$)^2

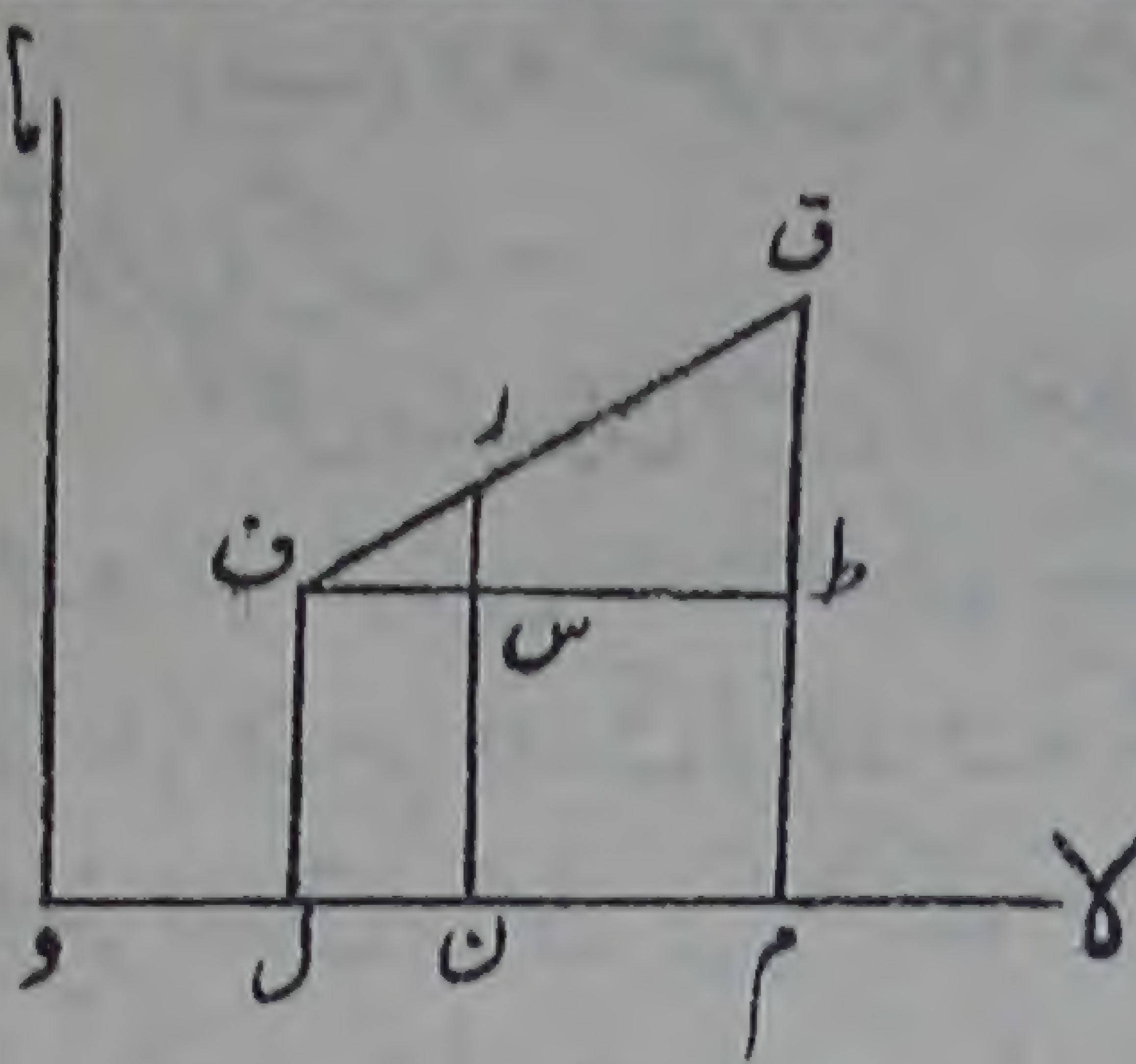
پس ف ق = $\pm\sqrt{\text{(لا}_1 - \text{لا}_2)^2 + (\text{ما}_1 - \text{ما}_2)^2}$

نقطۂ ف کا فاصلہ مبداء و سے یا تو براہ راست دریافت کرلیا جاسکتا ہے یا مندرجۂ بالا ضابطہ میں لا$_2$ = ۰ اور ما$_2$ = ۰ لکھنے سے۔ چنانچہ

و ف = $\pm\sqrt{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2}$

خطوطِ مستقیم جب محور و لا یا و ما کی سمت میں ناپے جاتے ہیں تو وہ مثبت تصور کیے جاتے ہیں اور ان کی مخالف سمتوں میں منفی۔ ان سمتوں کے متوازی سمتوں کے متعلق بھی یہی قرار داد مسلّم ہے۔ دیگر اسمات کے متعلق ایسی کوئی قرار داد نہیں۔ لیکن اگر ایک ہی خطِ مستقیم پر تین یا زیادہ نقطے ف، ق، ر ...... ہوں تو ہمیں چاہیے کہ اس خط پر جملہ نقطوں کے لیے ایک ہی سمت کو مثبت تصور کریں اور اس کی مخالف سمت کو منفی تاکہ جملہ صورتوں میں ف ق + ق ر = ف ر ہو۔

(ج) دو نقطوں کو ملانے والے خطِ مستقیم کو معیّنہ نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کے محددوں کی تعیین۔



شکل ۲

شکل ۲ میں فرض کرو کہ نقطۂ ف کے محدّد لا$_1$، ما$_1$ ہیں اور نقطۂ ق کے محدّد لا$_2$، ما$_2$۔ نقطۂ ر خط ف ق کو ک$_1$: ک$_2$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اور اس کے محدّد لا، ما ہیں۔ ف ل، ر ن، ق م محور ما کے متوازی کھینچو اور ف س ط محور لا کے متوازی۔

تب ل ن : ن م = ف س : س ط = ف ر : ر ق = ک$_1$: ک$_2$

∴ ک$_2$ ل ن - ک$_1$ ن م = ۰ یعنی ک$_2$ (لا - لا$_1$) - ک$_1$ (لا$_2$ - لا) = ۰

∴ لا = (ک$_2$ لا$_1$ + ک$_1$ لا$_2$) / (ک$_1$ + ک$_2$) اسی طرح ما = (ک$_2$ ما$_1$ + ک$_1$ ما$_2$) / (ک$_1$ + ک$_2$)

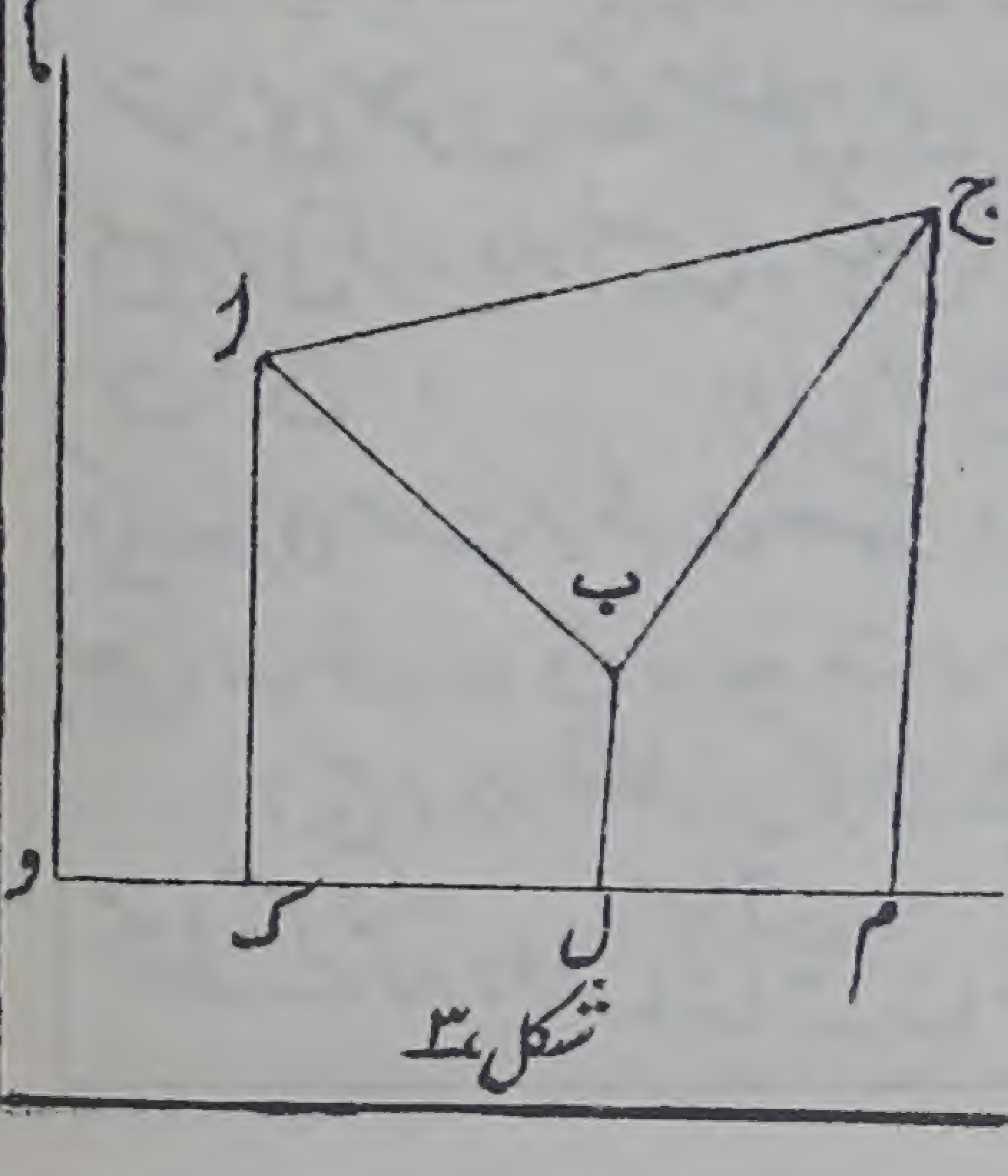
اگر نقطۂ ر سے خط ف ق کی تنصیف ہوتی ہے تو واضح ہے کہ ر کے محدّد

$\frac{1}{2}$ (لا$_1$ + لا$_2$) اور $\frac{1}{2}$ (ما$_1$ + ما$_2$) ہیں۔

اگر ر خط ف ق کو نسبت ک$_1$: ک$_2$ میں قطع کرے تو ل ن : ن م = ک$_1$: - ک$_2$

پس لا = (ک$_1$ لا$_2$ - ک$_2$ لا$_1$) / (ک$_1$ - ک$_2$) اور ما = (ک$_1$ ما$_2$ - ک$_2$ ما$_1$) / (ک$_1$ - ک$_2$)

مصرحۂ بالا نتائج ہر صورت میں صحیح ہیں محوروں کے مابین کچھ ہی زاویہ ہو۔



شکل ۳

(د) ایک مثلث کے رقبہ کے لیے جملہ اس کے زاویئی نقطوں کے محدّدوں کی رقموں میں۔

شکل ۳ میں ا ب ج ایک مثلث ہے جس کے زاویئی نقطوں ا، ب، ج کے محدّد علی الترتیب لا$_1$ ما$_1$، لا$_2$ ما$_2$ اور لا$_3$ ما$_3$ ہیں۔

ا ک، ب ل اور ج م خطوط محور ما کے متوازی کھینچو۔

△ ا ب ج = م ج ا ک ۔ ک ا ب ل ۔ ل ب ج م

لیکن م ج ا ک = △ م ج ا + △ ا ک م = ½ ک م × م ج + ½ ک م × ک ا

= ½ (لا۳ − لا۱) (ما۳ + ما۱)

اسی طرح ک ا ب ل = ½ (لا۲ − لا۱) (ما۱ + ما۲)

اور ل ب ج م = ½ (لا۳ − لا۲) (ما۲ + ما۳)

∴ △ ا ب ج = ½ {(ما۳ + ما۱)(لا۳ − لا۱) + (ما۱ + ما۲)(لا۱ − لا۲) + (ما۲ + ما۳)(لا۲ − لا۳)}

اس جملہ کو پھیلا کر اس میں سے جو رقمیں کٹ جاتی ہیں اُن کو نکال دینے سے

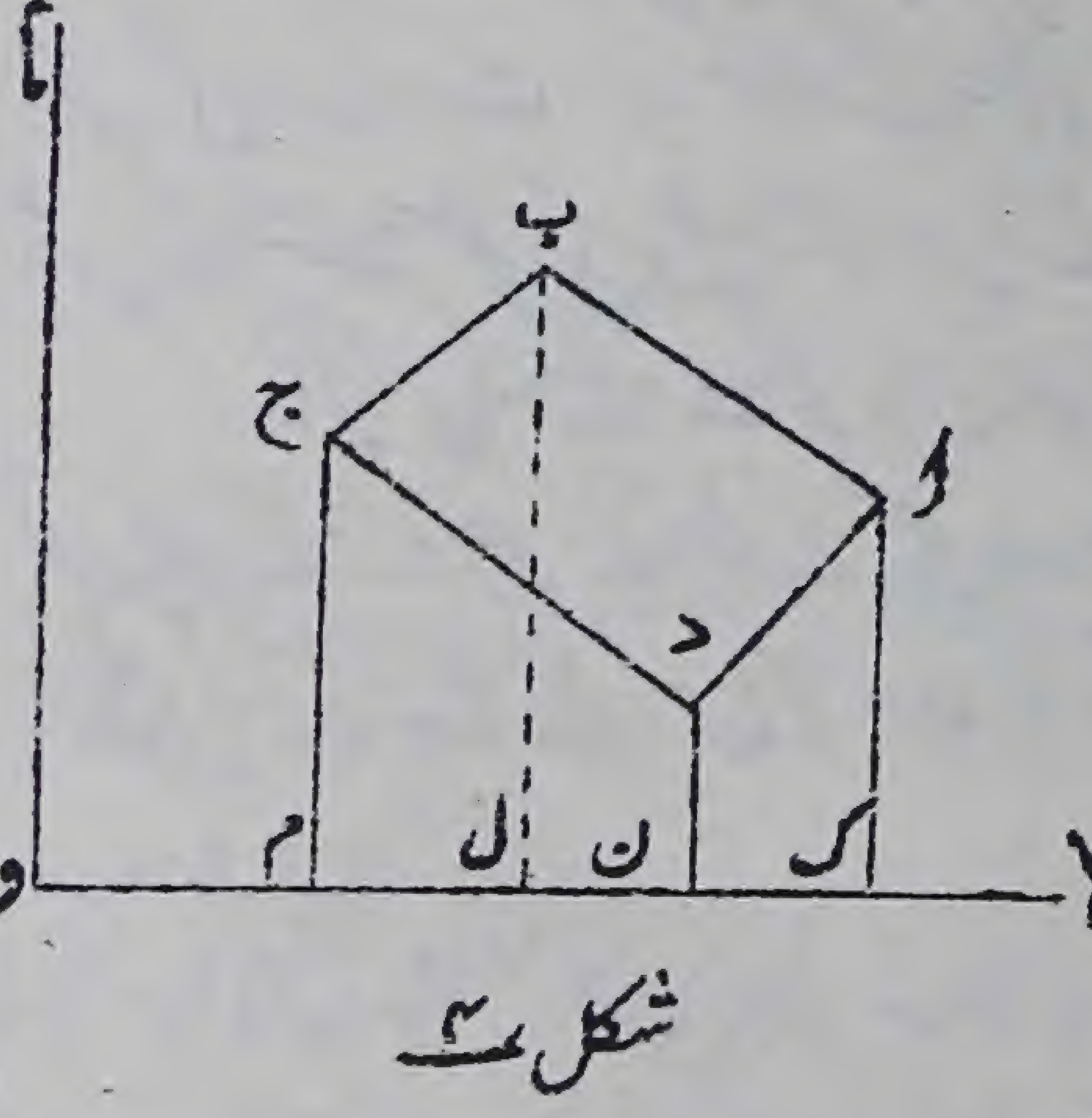
△ ا ب ج = ½ (لا۱ ما۲ − لا۲ ما۱ + لا۲ ما۳ − لا۳ ما۲ + لا۳ ما۱ − لا۱ ما۳)

= ½

لا۱	ما۱	۱
لا۲	ما۲	۱
لا۳	ما۳	۱

مثلث کے رقبہ کے لیے مندرجۂ بالا جملہ مثبت پایا جائیگا اگر دَور ا ب ج ا کے اظہار کی ترتیب مخالف سمت ساعت ہوگی یعنی مثلث کے گرد گھومنے کے لیے مخالف سمت ساعت حرکت کرنی ہوگی۔ اگر حسابی عمل سے رقبہ کی قیمت منفی برآمد ہو تو سمجھنا چاہیے کہ مثلث کے گرد گھومنے کے لیے موافق سمت ساعت ترتیب اختیار کی گئی ہے۔

(ھ) ایک ذو اربعۃ الاضلاع کا رقبہ اس کے زاویئی نقطوں کی رقموں میں (بلحاظ ایک مقررہ ترتیب کے)۔



شکل ۴۲

شکل ۴۲ میں فرض کرو کہ ا، ب، ج، د زاویئی نقطوں کے محدد علی الترتیب (لا۱، ما۱)، (لا۲، ما۲)، (لا۳، ما۳) اور (لا۴، ما۴) ہیں۔

اک، ب ل، ج م اور د ن محور ما کے متوازی کھینچو۔

تب رقبہ ا ب ج د = ک ا ب ل + ل ب ج م - م ج د ن - ن د ا ک

رقبہ ک ا ب ل = ½ (ما۱ + ما۲) (لا۱ - لا۲)، رقبہ ل ب ج م = ½ (ما۲ + ما۳) (لا۲ - لا۳)،

" م ج د ن = ½ (ما۳ + ما۴) (لا۴ - لا۳)، " ن د ا ک = ½ (ما۴ + ما۱) (لا۱ - لا۴)

پس رقبہ ا ب ج د = ½ { (ما۱ + ما۲) (لا۱ - لا۲) + (ما۲ + ما۳) (لا۲ - لا۳)
+ (ما۳ + ما۴) (لا۳ - لا۴) + (ما۴ + ما۱) (لا۴ - لا۱) }

کٹ جانے والی رقموں کو چھوڑ دینے سے رقبہ ا ب ج د

= ½ { لا۱ ما۲ - لا۲ ما۱ + لا۲ ما۳ - لا۳ ما۲ + لا۳ ما۴ - لا۴ ما۳ + لا۴ ما۱ - لا۱ ما۴ }

اس کے مماثل طریقہ سے کسی بھی کثیر الاضلاع کا رقبہ دریافت کیا جاسکتا ہے۔

جس تدویری ترتیب میں مندرجۂ بالا ضابطہ لکھا گیا ہے، اگر زاویئی نقطے شکل کے محیط کے گرد مخالف سمت ساعت ترتیب میں لیے جائیں تو مثبت ہوتا ہے اور اگر موافق سمت ساعت ترتیب میں لیے جائیں تو منفی۔

اگر ہم کسی منحنی کی ایک ایسی ہندسی خاصیت کے ذریعہ تعریف کریں جو اس کے تمام نقطوں کے لیے مشترک ہو تو ایسا جبری رابطہ دریافت ہوسکتا ہے جو صرف اسی منحنی کے جملہ نقطوں کے محدودوں کے لیے صحیح ہو اور کسی اور کے لیے صحیح نہ ہو۔ اِس رابطہ کو منحنی کی **مساوات** کہتے ہیں۔

ہندسۂ تحلیلی میں کسی ہندسی خاصیت کے لحاظ سے منحنی کی تعریف کر کے اُس کی مساوات دریافت کی جاتی ہے اور اگر ایسی کوئی مساوات دی گئی ہو تو اُس کے متعلقہ منحنی کی وضع اور اس کے خواص دریافت کیے جاتے ہیں۔

اگر کسی مساوات کو اس طرح تحویل کریں کہ اس کے متغیروں کے قوت نما ممکنہ چھوٹے سے چھوٹے مثبت صحیح عدد ہوں تو اُس کے سب سے بڑے ابعاد کی رقم یا رقموں کے لحاظ سے اِس کا درجہ شمار ہوگا۔ مثلاً ا لا + ب ما + ج = ۰ پہلے درجہ کی مساوات ہے،

لا² + ما² = ر²، ا لا ما + ب لا + ج = ۰ اور √لا + √ما = ۱ (جو ناطق بننے پر لا² + ما² - ۲ لا ما - ۲ لا - ۲ ما + ۱ = ۰ میں تبدیل ہوتی ہے) تینوں دوسرے

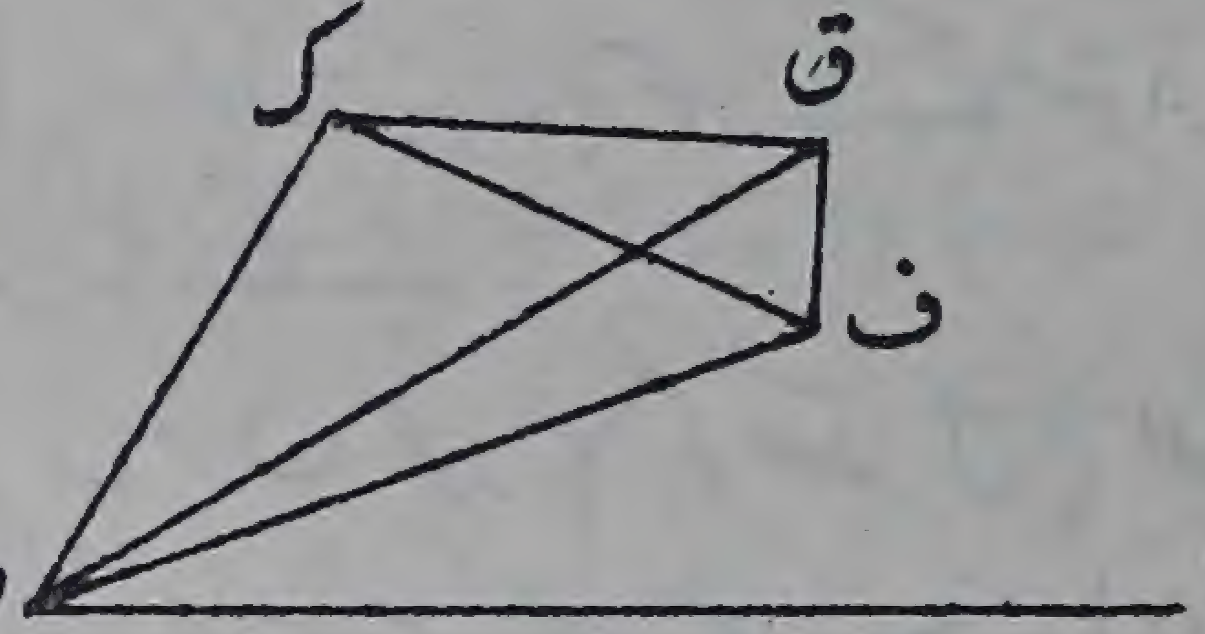
درجہ کی مساواتیں ہیں۔

۵۸۔ قطبی محدّدوں کا استعمال۔ کسی نقطہ کا سمتی زاویہ طہ اگر محور و لا سے مخالف سمت ساعت میں ناپا جاتا ہے تو مثبت تصور کیا جاتا ہے۔ نیم قطر سمتی ر اگر مبدا ر و سے سمتی زاویہ کے حائط خط کی سمت میں ناپا جاتا ہے تو مثبت مانا جاتا ہے اور اگر اس کے مخالف سمت میں ناپا جاتا ہے تو منفی۔

(ا) دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ نقطوں کے قطبی محدّدوں کی رقموں میں۔

اگر ف، ق دو نقطوں کے محدد ر$_1$، طہ$_1$ اور ر$_2$، طہ$_2$ ہوں تو علم المثلثات سے

ف ق^2 = و ف^2 + و ق^2 - ۲ و ف × و ق جم ف و ق



شکل ۵

لیکن و ف = ر$_1$، و ق = ر$_2$ اور $\angle$ ف و ق

= $\angle$ لا و ق - $\angle$ لا و ف = طہ$_2$ - طہ$_1$

$\therefore$ ف ق^2 = ر$_1^2$ + ر$_2^2$ - ۲ ر$_1$ ر$_2$ جم (طہ$_2$ - طہ$_1$)

(ب) مثلث کا رقبہ اس کے زاویئی نقطوں کے قطبی محدّدوں کی رقموں میں۔

فرض کرو شکل ۵ میں ف ق ک مثلث کے زاویئی نقطوں یعنی ف، ق اور ک کے محدد علی الترتیب (ر$_1$، طہ$_1$) (ر$_2$، طہ$_2$) اور (ر$_3$، طہ$_3$) ہیں۔

تب △ ف ق ک = △ و ف ق + △ و ق ک ۔ △ و ف ک

لیکن و ف ق = ½ و ف × و ق جب ف و ق = ½ ر۱ ر۲ جب (ط۲ − ط۱)

و ق ک = ½ ر۲ ر۳ جب (ط۳ − ط۲) اور و ف ک = ½ ر۳ ر۱ جب (ط۳ − ط۱)

پس ف ق ک = ½ {ر۱ ر۲ جب (ط۲ − ط۱) + ر۲ ر۳ جب (ط۳ − ط۲)

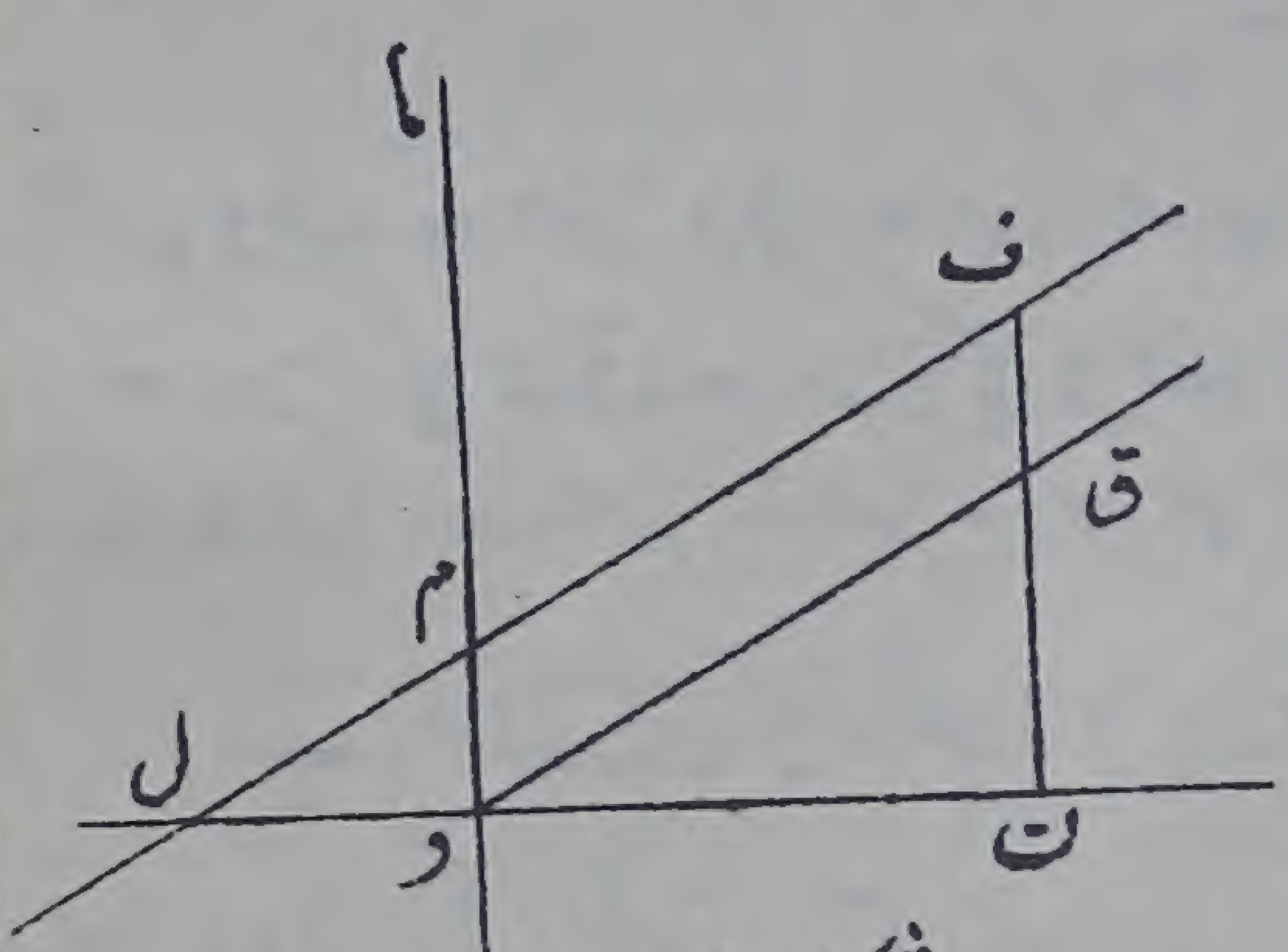
+ ر۳ ر۱ جب (ط۱ − ط۳)}

بطور مشق طالب علم کو چاہیے کہ ذو اربعۃ الاضلاع ف ق ک ل کا رقبہ قطبی محدّدوں میں دریافت کرے اور اس کے بعد قطبی اور کارٹیزی محدّدوں کے باہمی رابطوں کی مدد سے اس رقبہ کو کارٹیزی محدّدوں میں تحویل کرے۔

۵۹۔ خطِ مستقیم کی مساواتیں ۔

اگر خطِ مستقیم محور لا کے متوازی ہو تو واضح ہے کہ اس کی مساوات ما = ب ہوگی جس میں ب اس کا عمودی فاصلہ محور لا سے ہے۔ اسی طرح لا = ا ایسے خط کی مساوات ہے جو محور ما کے متوازی ہے۔ یہاں ا اس خط کا عمودی فاصلہ محور ما سے ہے۔

اگر خطِ مستقیم ل م ف محور لا کو نقطۂ ل پر اور محور ما کو نقطۂ م پر قطع کرے تو فرض کرو کہ و م = ج اور مس ∠ و ل م = م۔ اگر خط کے کسی نقطہ ف کے محدد لا، ما ہوں تو ف ن محور ما کے متوازی کھینچو اور مبداء و میں سے و ق دیے ہوئے خط ل م ف کے متوازی کھینچو۔ دیکھو شکل ۶۔



شکل ۶

تب ن ف = ن ق + ق ف
= و ن مس ن و ق
+ و م

یعنی ما = م لا + ج

کسی خاص خطِ مستقیم کے لیے م اور ج مستقل ہوں گے۔ واضح ہے کہ مندرجۂ بالا

مساوات پہلے درجہ کی ہے۔

(ا) پہلے درجہ کی کوئی سی مساوات خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

پہلے درجہ کی مساوات کی عام ترین صورت۔ ا لا + ب ما + ج = ۰ ہے۔ اس مساوات کے منحنی پر ف، ق، ر کوئی سے تین نقطے لیے جائیں اگر ان کے محدد (لا۱، ما۱) (لا۲، ما۲) اور (لا۳، ما۳) ہوں تو دی ہوئی مساوات ان محددوں کے لیے بھی صحیح ہوگی۔ پس

ا لا۱ + ب ما۱ + ج = ۰

ا لا۲ + ب ما۲ + ج = ۰

ا لا۳ + ب ما۳ + ج = ۰

ا، ب اور ج کو ساقط کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

| لا۱، ما۱، ۱ |
| لا۲، ما۲، ۱ | = ۰
| لا۳، ما۳، ۱ |

یعنی ف، ق، ر نقطوں کو ملانے والے خطوط کا رقبہ صفر ہے۔

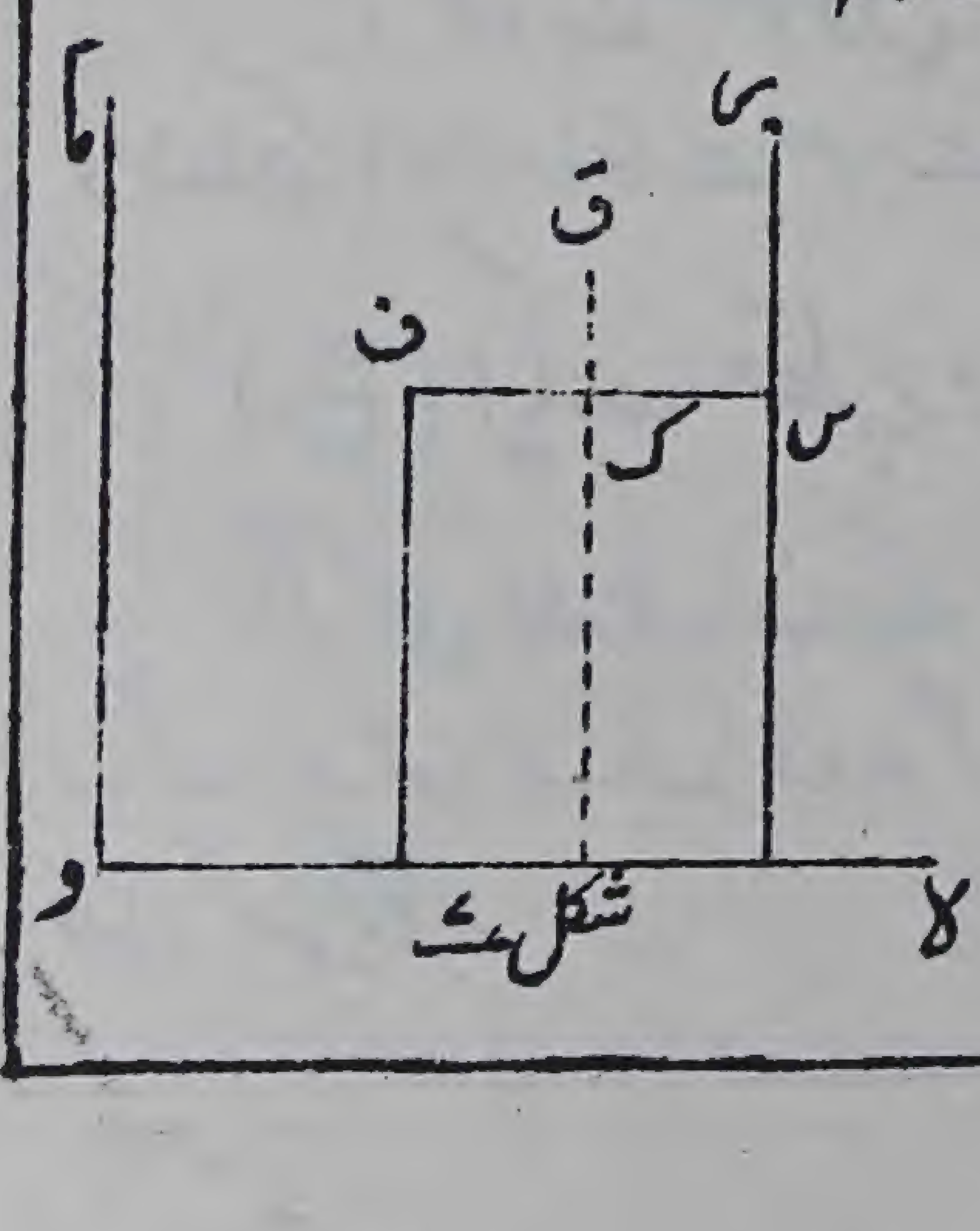
پس یہ نقطے خطِ مستقیم پر واقع ہیں۔ اور اس لیے دی ہوئی مساوات خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

طریق دیگر۔ مندرجۂ بالا تین مساواتوں میں ایک مساوات کو دوسری مساوات میں سے خارج کرنے سے

ا (لا۱ − لا۲) + ب (ما۱ − ما۲) = ۰

ا (لا۱ − لا۳) + ب (ما۱ − ما۳) = ۰

(لا۱ − لا۲) / (ما۱ − ما۲) = (لا۱ − لا۳) / (ما۱ − ما۳)



شکل ۲

پس ف ک / ک ق = ف س / س ر (دیکھو شکل ۲)

یعنی △ ف ک ق اور △ ف س ر متشابہ ہیں جس سے واضح ہے کہ ف ق ر خطِ مستقیم ہے۔

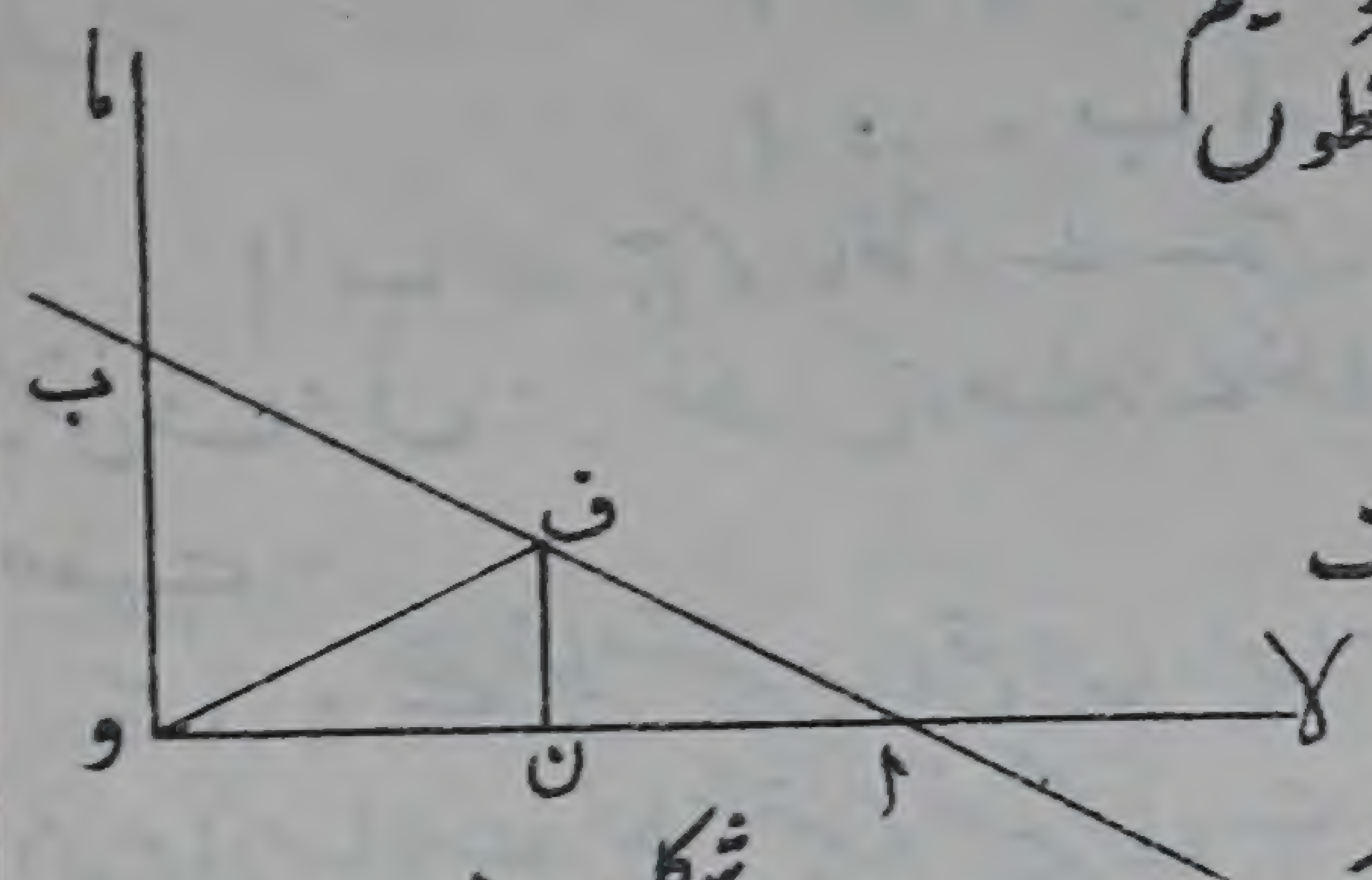
اگر مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ تو

ما = − (ا/ب) لا + (ج/ب) کی صورت میں

لکھیں تو معلوم ہوگا کہ یہ مساوات ما = ھ لا + ج کے تشابہ ہے اس لیے کہ ھ = - $\frac{۱}{ب}$ اور ج = $\frac{ج}{ب}$ گویا خطِ مستقیم کی عام مساوات میں بھی صرف دو ہی مستقل ہیں۔

(ب) خطِ مستقیم کی مساوات مقطوعوں کی رقموں میں جو حوالہ کے محوروں پر خط سے بنتے ہیں۔

فرض کرو شکل ۳۰ میں خطِ مستقیم محور لا اور ما کو ا اور ب نقطوں میں قطع کرتا ہے۔



شکل ۳۰

وا = ل اور وب = ب

فرض کرو کہ خط پر کے کسی نقطۂ ف کے محدد لا، ما ہیں۔

ف ن محور ما پر علی القوائم کھینچو اور و ف کو ملاؤ

تب △ و ا ف + △ و ف ب = △ و ا ب

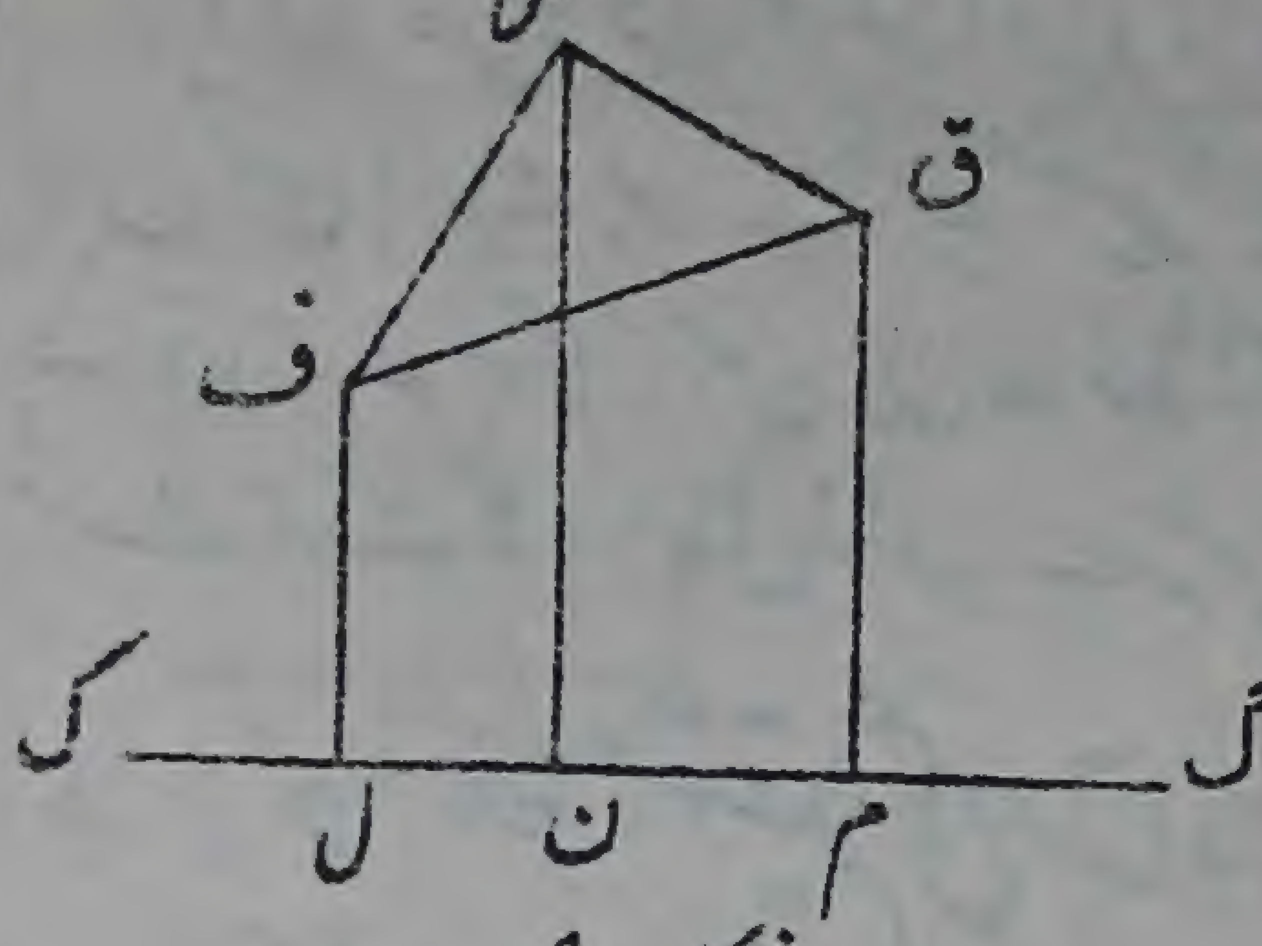
∴ ل ما + ب لا = ل ب

یعنی $\frac{لا}{ل}$ + $\frac{ما}{ب}$ = ۱

اگر محور کے مقطوعوں ل اور ب کے متکافیوں کو ل، م سے تعبیر کریں تو مندرجہ بالا مساوات صورت ل لا + م ما = ۱ میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

(ج) ایک خط پر دوسرے خط کا ظل۔

اگر کسی خط ف ق کے سروں ف اور ق سے کسی دوسرے خط ک گ پر عمود ف ل، ق م گرائے جائیں تو ل م خط ف ق کا خط ک گ پر ظل کہلائیگا۔



شکل ۹

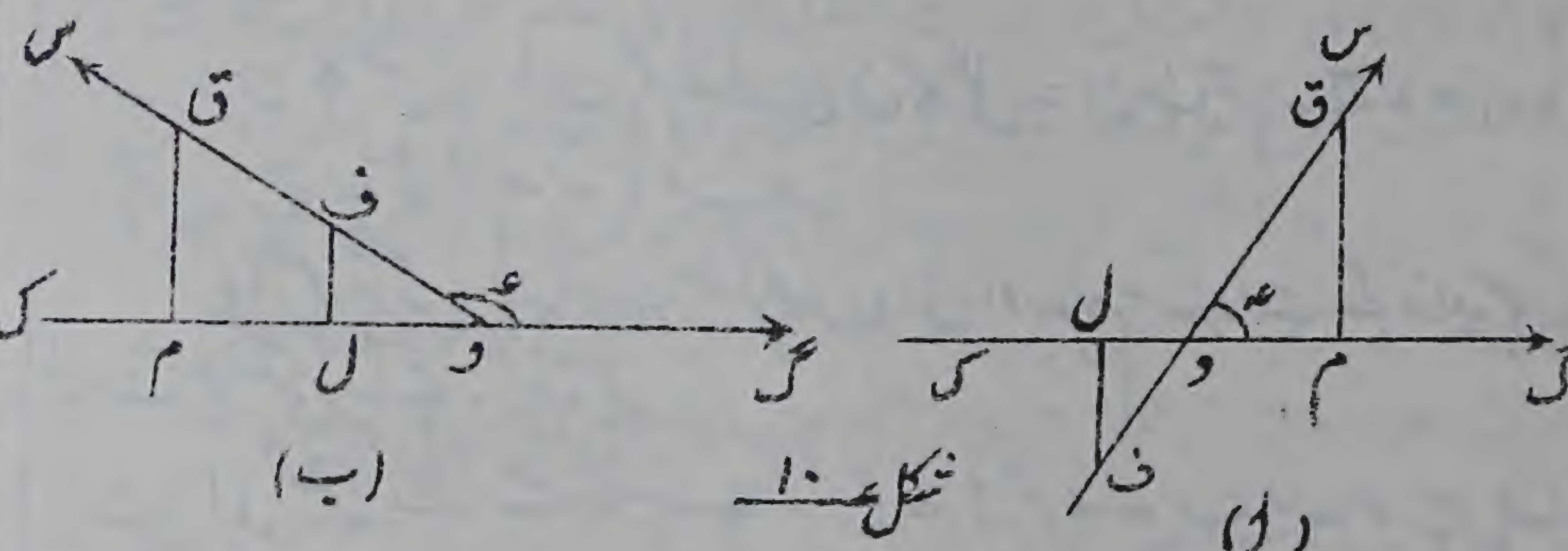
فرض کرو س کوئی اور نقطہ ہے اور ن اس کا ظل گ گ پر۔
تب چونکہ جملہ صورتوں میں
ل م + م ن = ل ن اس سے نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ کسی خط پر ف ق اور ق س کے ظلوں کا حاصل جمع اس خط پر ف س کے ظل کے مساوی ہے۔

اسی طرح کسی خط پر اب، ب ج، ج د ......، ف ق کے ظلوں کا حاصل جمع ا ق کے ظل کے مساوی ہے۔ اگر کثیر الاضلاع بند شکل کا ہو تو کسی بھی خط پر اس کے اضلاع کے ظلوں کا حاصل جمع صفر ہوگا۔

نتیجۂ صریح ــ اگر ن ضلعوں والا منتظم کثیر الاضلاع کا کوئی ایک ضلع دیے ہوئے خط کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو اس کے دوسرے ضلعے اس خط کے ساتھ سلسلہ وار ط + $\frac{2\pi}{n}$، ط + $\frac{4\pi}{n}$، ..... ط + $\frac{6\pi}{n}$ وغیرہ زاویے بنائینگے۔ پس ط کی کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو

جم ط + جم (ط + $\frac{2\pi}{n}$) + جم (ط + $\frac{4\pi}{n}$) + ... ن رقموں تک = ۰

ف ق جس خط پر واقع ہے اگر وہ خط گ گ کو نقطہ و میں قطع کرے اور اگر زاویہ گ و س کو جو ان خطوط کی مثبت سمتوں و گ اور و س کے مابین بنتا ہے ع سے تعبیر کیا جائے تو شکل ۱۰ کے معائنہ سے واضح ہوگا کہ

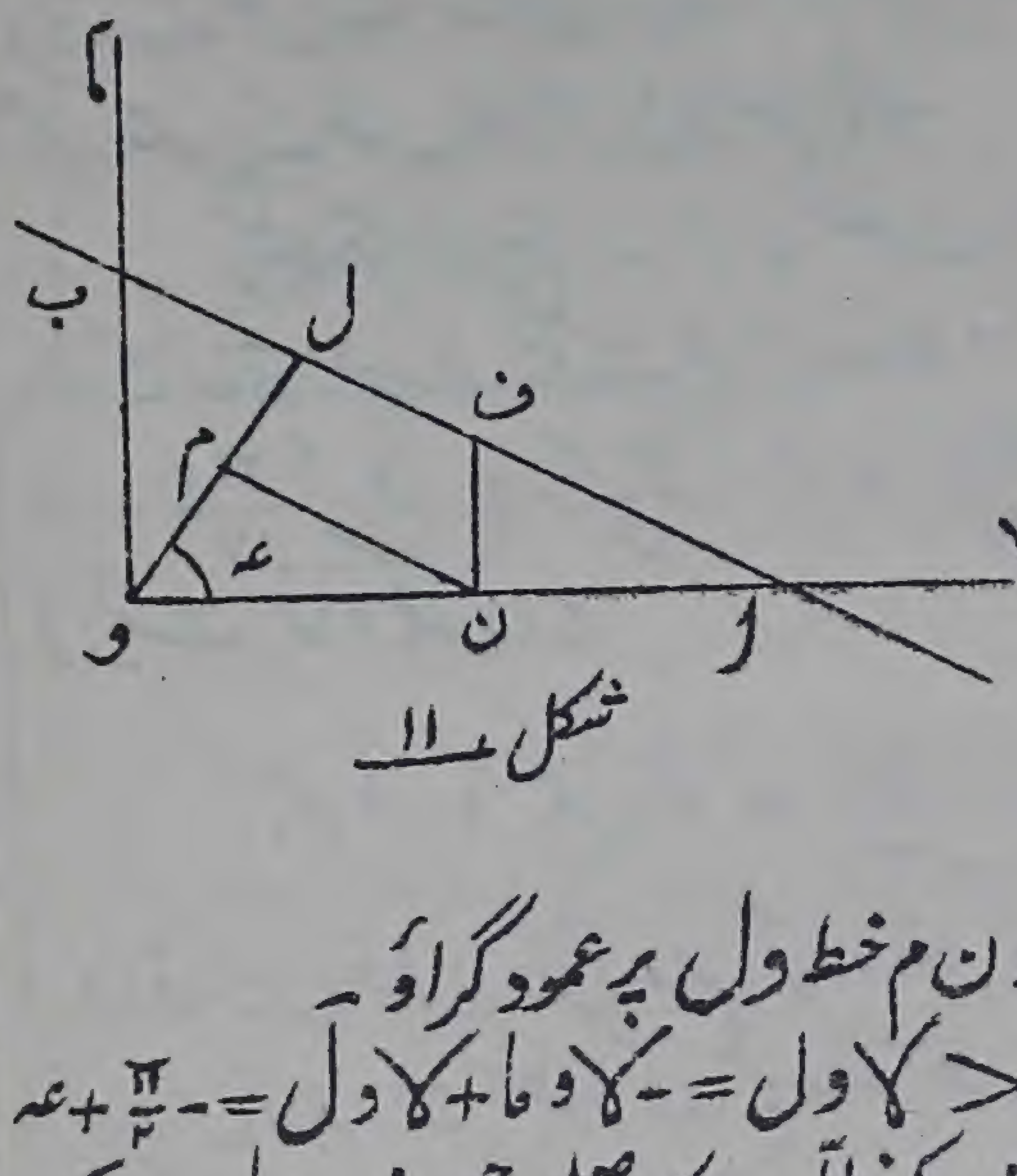


شکل ۱۰

و ل = و ف جم عہ اور و م = و ق جم عہ ∴ ل م = ف ق جم عہ

پس کسی دیے ہوئے خطِ مستقیم ک گ پر کسی دوسرے خط ف ق کا ظل ف ق جم عہ ہوگا، جس میں عہ خط ک گ کی مثبت سمت اور اُس خط کی ثابت سمت کا درمیانی زاویہ ہے جس پر ف ق واقع ہے۔

(د) خطِ مستقیم کی مساوات، مبداء سے خط پر گرائے ہوئے عمود کے طول اور عمود اور حوالے کے کسی محور کے درمیانی زاویہ کی رقموں میں۔



شکل ۱۱۱

فرض کرو خط اب پر مبداء سے گرائے ہوئے عمود و ل کا طول ع ہے (دیکھو شکل ۱۱۱) اور اس عمود کا زاویہ محور و لا کے ساتھ (یعنی < لا و ل) عہ ہے۔ ف کوئی سا ایک نقطہ خط اب پر واقع ہے اور اس کے محدد لا، ما ہیں۔

ف ن محور ما کے متوازی کھینچو اور ن م خط و ل پر عمود گراؤ۔

ہر صورت میں < ما و ل = < ما و لا + < لا و ل = - لا و ما + لا و ل = $-\frac{\pi}{2}$ + عہ

چونکہ خط و ل پر خطوط و ن اور ن ف کے ظلوں کا حاصل جمع خود و ل کے مساوی ہے۔

اور و ن کا ظل = و ن جم عہ اور ن ف کا ظل = ن ف جم ($-\frac{\pi}{2}$ + عہ) = ما جب عہ

پس ع = لا جم عہ + ما جب عہ

واضح ہو کہ یہ مساوات مقطوعوں والی اور عام مساوات کے ذریعہ بھی بآسانی ثابت ہو سکتی ہے۔ چنانچہ

(۱) شکل ۱۱۱ سے ظاہر ہے کہ ع = ا جم عہ = ب جب عہ پس مساوات

$\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$ میں ا اور ب کے عوض $\frac{\text{ع}}{\text{جم عہ}}$ اور $\frac{\text{ع}}{\text{جب عہ}}$ لکھنے سے

$$\frac{\text{لاجم عہ}}{\text{ع}} + \frac{\text{ما جب عہ}}{\text{ع}} = ۱$$

یعنی لاجم عہ + ما جب عہ = ۱

(۲) عام مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ کو $\sqrt{(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)}$ پر

تقسیم کرنے سے $\frac{\text{ا}}{\sqrt{(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)}}\text{لا} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)}}\text{ما} + \frac{\text{ج}}{\sqrt{(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)}} = ۰$

چونکہ $\frac{\text{ا}}{\sqrt{(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)}}$ اور $\frac{\text{ب}}{\sqrt{(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)}}$ کے مربعوں کا حاصل جمع اکائی ہے اِس لیے یہ کسی زاویہ کی جیب التمام اور جیب کو تعبیر کرتے ہیں۔ اگر یہ زاویہ عہ قرار دیا جائے تو

لاجم عہ + ما جب عہ ـ ع = ۰ جس میں ع بجائے ـ $\frac{\text{ج}}{\sqrt{(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)}}$ لکھا گیا ہے۔

(ھ) کسی خطِ مستقیم کی دی ہوئی مساوات سے اس کی وضع معلوم کرنے کے لیے اس کے صرف دو نقطوں کے محددوں کا دریافت کرلینا کافی ہے۔ اس کے لیے سہولت کے لحاظ سے لا یا ما کی کوئی سی قیمتیں فرض کر کے دی ہوئی مساوات سے اُن کے متعلقہ ما یا لا کی قیمتیں معلوم کرلی جاسکتی ہیں۔ سب سے زیادہ سہولت اس میں ہے کہ حوالہ کے محوروں کے ساتھ خط کے نقاطِ تقاطع دریافت کرلیے جائیں۔ مساوات میں ما، لا کو علی الترتیب صفر لکھنے سے ان کا پتہ چل جاتا ہے۔

اگر ایسے خطِ مستقیم کی مساوات مطلوب ہے جو کوئی سے دو شرائط کی تکمیل کرتا ہے تو دی ہوئی دو شرطوں کی مدد سے خط کی کوئی سی عام شکل کی مساوات لے کر اس کے دونوں مستقل دریافت کرلیے جائیں۔ مثلاً (۱) ما = مرلا + ج میں مر اور ج، (۲) $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۱$ میں ا اور ب، (۳) ل لا + مر ما = ۱ میں ل اور مر، (۴) لاجم عہ + ما جب عہ = ع میں عہ اور ع اور (۵) ا لا + ب ما + ج = ۰ میں $\frac{\text{ا}}{\text{ج}}$ اور $\frac{\text{ب}}{\text{ج}}$۔ ذیل میں اس کی چند مثالیں دی جاتی ہیں۔

(و) خطِ مستقیم کی مساوات جو کسی دیے ہوئے نقطہ میں سے

دی ہوئی سمت میں کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدد لا۱، ما۱ ہیں اور خط کا محور لا کے ساتھ زاویہ مس$^{-1}$م ہے۔ خط کی مساوات ما = م لا + ج اور چونکہ نقطہ لا۱، ما۱ اس پر واقع ہے۔

لہٰذا ما۱ = م لا۱ + ج پس

ما - ما۱ = م (لا - لا۱)

(ز) دیے ہوئے دو نقطوں میں سے گذرنے والے خط کی مساوات۔

اگر ان نقطوں کے محدد علی الترتیب (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) ہوں تو مساوات

ا لا + ب ما + ج = ۰ میں

لا، ما کی یہ خاص قیمتیں لکھنے سے

ا لا۱ + ب ما۱ + ج = ۰ اور ا لا۲ + ب ما۲ + ج = ۰

آخری دو مساواتوں میں سے ا، ب، ج کو ساقط کرنے سے مطلوبہ مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & 1 \\ \text{لا}_1 & \text{ما}_1 & 1 \\ \text{لا}_2 & \text{ما}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

حاصل ہوجاتی ہے

(ح) دیے ہوئے دو خطوط کے نقطۂ تقاطع کے محدد۔

فرض کرو کہ ان خطوط کی مساواتیں

ا۱ لا + ب۱ ما + ج۱ = ۰

اور ا۲ لا + ب۲ ما + ج۲ = ۰ ہیں

ان کا نقطۂ تقاطع ان دونوں مساواتوں کی شرط کو پورا کریگا۔

پس ان مساواتوں کو حل کرکے لا اور ما کی جو قیمتیں حاصل کی جائینگی وہ اس نقطۂ تقاطع کے محدد ہونگے۔ وہ حسبِ ذیل ہیں :—

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{ج}_1\text{ا}_2 - \text{ج}_2\text{ا}_1} = \frac{1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1}$$

(ط) تین خطوطِ مستقیم کے ایک نقطہ میں متقاطع ہونے کی شرط۔

فرض کرو ان خطوط کی مساواتیں حسبِ ذیل ہیں :-

$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1 = 0$؛ $\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2 = 0$ اور $\text{ا}_3\text{لا} + \text{ب}_3\text{ما} + \text{ج}_3 = 0$

یہ خطوط ایک نقطہ میں متقاطع ہونگے اگر ان میں سے دو کے تقاطع کا نقطہ تیسرے پر واقع ہوگا۔

پہلی اور دوسری مساوات کے نقطۂ تقاطع کے محدّدوں کی تصریح

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1} = \frac{\text{ما}}{\text{ج}_1\text{ا}_2 - \text{ج}_2\text{ا}_1} = \frac{1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1}$$ سے ہوتی ہے۔

اس نقطۂ تقاطع کے محدّدوں کو تیسری مساوات میں درج کرنے سے ہمیں معلوم ہو جاتا ہے کہ یہ نقطہ تیسرے خط پر واقع ہونے کی شرط کیا ہے۔ وہ شرط حسبِ ذیل ہے:-

$$\text{ا}_3\frac{\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1} + \text{ب}_3\frac{\text{ج}_1\text{ا}_2 - \text{ج}_2\text{ا}_1}{\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1} + \text{ج}_3 = 0$$

یا $\text{ا}_3(\text{ب}_1\text{ج}_2 - \text{ب}_2\text{ج}_1) + \text{ب}_3(\text{ج}_1\text{ا}_2 - \text{ج}_2\text{ا}_1) + \text{ج}_3(\text{ا}_1\text{ب}_2 - \text{ا}_2\text{ب}_1) = 0$

(ی) دی ہوئی مساواتوں والے دو خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویہ کی تعیین۔

(۱) اگر ان خطوط کی مساواتیں بشکل $\text{لا جم ع}_1 + \text{ما جب ع}_1 - \text{ع}_1 = 0$ اور $\text{لا جم ع}_2 + \text{ما جب ع}_2 - \text{ع}_2 = 0$ دی جائیں تو ان کا درمیانی زاویہ $(\text{ع}_1 - \text{ع}_2)$ یا $\pi - (\text{ع}_1 - \text{ع}_2)$ ہوگا۔

اِس لیے کہ ع_1، ع_2 وہ زاویے ہیں جو اِن خطوط پر مبدار سے گرائے ہوئے

عمود علی الترتیب محور لا کے ساتھ بناتے ہیں۔ اور کوئی سے دو خطوط کا درمیانی زاویہ ان خطوط کے عمودوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے یا اس کا تکمل ہوتا ہے۔

(۲) اگر مساواتیں بشکل $ما = م_۱ لا + ج_۱$ اور $ما = م_۲ لا + ج_۲$ ہوں تو محور لا کے ساتھ ان خطوط کے زاویوں کو $ط_۱$ اور $ط_۲$ سے تعبیر کرنے سے،

$$مس ط_۱ = م_۱ \quad اور \quad مس ط_۲ = م_۲$$

$\therefore$ $مس (ط_۱ - ط_۲) = \frac{م_۱ - م_۲}{۱ + م_۱ م_۲}$ پس زاویہ مطلوبہ $= مس^{-۱} \left(\frac{م_۱ - م_۲}{۱ + م_۱ م_۲}\right)$

واضح ہے کہ خطوط باہدیگر علی القوائم ہونگے اگر $۱ + م_۱ م_۲ = ۰$ اور متوازی ہونگے اگر $م_۱ = م_۲$

(۳) اگر مساواتیں بشکل $ا_۱ لا + ب_۱ ما + ج_۱ = ۰$ اور $ا_۲ لا + ب_۲ ما + ج_۲ = ۰$ ہوں تو ان کو $ما = - \frac{ا_۱}{ب_۱} لا - \frac{ج_۱}{ب_۱}$ اور $ما = - \frac{ا_۲}{ب_۲} لا - \frac{ج_۲}{ب_۲}$ کی شکل میں تبدیل کرنے اور (۲) سے مقابلہ کرنے سے معلوم ہوگا کہ زاویۂ مطلوبہ

$$مس^{-۱} \frac{- \frac{ا_۱}{ب_۱} + \frac{ا_۲}{ب_۲}}{۱ + \frac{ا_۱ ا_۲}{ب_۱ ب_۲}} \quad یعنی \quad مس^{-۱} \frac{ب_۱ ا_۲ - ب_۲ ا_۱}{ا_۱ ا_۲ + ب_۱ ب_۲} \quad ہے$$

یہ خطوط باہدیگر علی القوائم ہونگے اگر $ا_۱ ا_۲ - ب_۱ ب_۲ = ۰$

اور متوازی ہونگے اگر $ب_۱ ا_۲ - ب_۲ ا_۱ = ۰$ یعنی اگر $\frac{ا_۱}{ا_۲} = \frac{ب_۱}{ب_۲}$

واضح ہے کہ خطوط کے باہدیگر علی القوائم ہونے کی شرط کی تکمیل ہو جاتی ہے اگر ان کی مساواتیں $ا لا + ب ما + ج_۱ = ۰$ اور $ب لا - ا ما + ج_۲ = ۰$ ہوں یا $ا لا + ب ما + ج_۱ = ۰$ اور $\frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ب} + ج_۲ = ۰$ ہوں۔

مسائل کے حل کرنے کے لیے یہ مفید رابطے ہیں اس لیے کہ اگر کسی دیے ہوئے خط کی مساوات میں اگر ہم لا اور ما کے سروں کو باہدیگر تبدیل کر دیں (یا منقلوب کردیں)، اور اِن میں سے کسی ایک کی علامت کو بدل دیں تو ہمیں ایک علی القوائم خط کی مساوات مل جاتی ہے۔ اگر اس خط کے لیے مزید کسی شرط کا پورا کرانا مقصود ہو تو اس کی متعلقہ مساوات کی مستقل رقم کو مناسب قیمت دی جانی چاہیے۔

(ک) خطِ مستقیم ا لا + ب ما + ج = ۰ کے مثبت اور منفی جانبوں کی تعریف۔

فرض کرو کسی نقطۂ ق کے محدّد لا۱، ما۱ ہیں۔ اور اِس نقطہ میں سے محور ما کے متوازی جو خط کھینچا جاتا ہے دیے ہوئے خط کو نقطۂ ف میں جس کے محدّد لا۱ ما۲ ہیں قطع کرتا ہے۔ اگر شکل کھینچکر دیکھا جائے تو واضح ہوگا کہ جب تک ق خطِ مستقیم کی ایک ہی جانب واقع ہے ق ف ایک ہی سمت میں کھینچا جاتا ہے۔ اور ق ف مخالف سمت میں کھینچا جاتا ہے اگر ق کوئی سا نقطہ اس خطِ مستقیم کی دوسری جانب ہے۔

یعنی ق ف خطِ مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے منفی ہے۔

چونکہ ق ف = ما۲ − ما۱ .... (۱)

اور ا لا۱ + ب ما۱ + ج = ا لا۱ + ب ما۱ + ج − (ا لا۱ + ب ما۲ + ج)

{اس لیے کہ نقطہ ف جس کے محدّد لا۱، ما۲ مانے گئے ہیں خط ا لا + ب لا + ج = ۰ واقع ہونے کی وجہ سے ا لا۱ + ب ما۲ + ج = ۰}

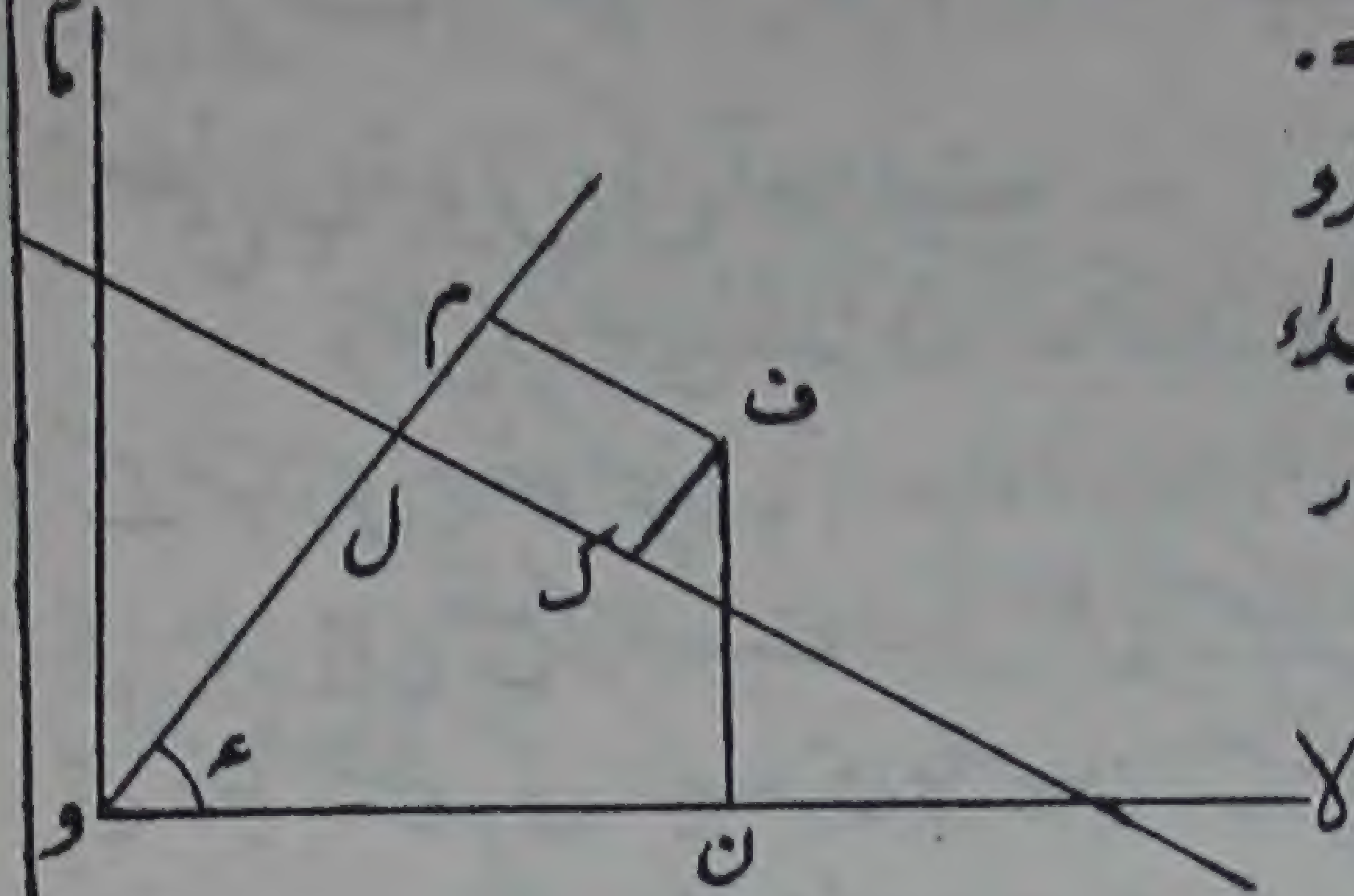
∴ ا لا۱ + ب ما۲ + ج = −ب (ما۲ − ما۱) .... (۲)

مساواتوں (۱) اور (۲) پر غور کرنے سے معلوم ہو جائیگا کہ ا لا۱ + ب ما۱ + ج = ۰ خطِ مستقیم کی ایک جانب کے تمام نقطوں کے لیے مثبت ہے اور دوسری جانب کے تمام نقطوں کے لیے منفی ہے۔

اگر کسی خطِ مستقیم کی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ اور کسی نقطہ کے محدّد لا۱، ما۱ جملہ ا لا + ب ما + ج میں درج کیے جائیں، تو اگر ا لا۱ + ب ما۱ + ج مثبت ہو تو نقطہ لا۱، ما۱ خط کی مثبت جانب متصور ہوگا اور اگر ا لا۱ + ب ما۱ + ج منفی ہو تو نقطہ لا۱، ما۱ خط کی منفی جانب متصور ہوگا۔

(ل) کسی دیے ہوئے خط سے، دیے ہوئے نقطہ کے

عمودی فاصلہ کی تعین۔



شکل ۱۲

خط کی مساوات لا جم ع + ما جب ع - ع = ۰ ہو اور دیے ہوئے نقطہ ف کے محدد لا، ما، فرض کرو۔ و ل اور ف ک مبداء اور نقطہ ف سے خط پر عمود کھینچو۔ اور ف ن محور و لا پر اور ف م خط و ل پر عمود گراؤ۔

تب و م = حاصل جمع و ن اور ن ف کے ظلوں کا خط و ل پر۔

چونکہ ن ف محور و ما کے متوازی ہے جملہ صورتوں میں ∠ ما و ل
= ∠ ما و لا + ∠ لا و ل = ∠ لا و ما + ∠ لا و ل = $-\frac{\pi}{2}$ + ع

و ل پر و ن کا ظل = و ن جم ع = لا، جم ع اور ن ف کا ظل = ن ف جم ($-\frac{\pi}{2}$ + ع) = ما، جب ع

پس و م = لا، جم ع + ما، جب ع پس ک ف = ل م = و م - و ل
= لا، جم ع + ما، جب ع - ع

پس خط لا جم ع + ما جب ع - ع = ۰ پر کسی نقطہ سے گرائے ہوئے عمود کا طول اس نقطہ کے محدد کو جملہ لا جم ع + ما جب ع - ع = ۰ میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر خط کی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ تو ہم اس کو بشکل

$$\frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{لا} + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{ما} + \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}} = 0$$

لکھ سکتے ہیں۔ پس نقطہ لا، ما، سے اس پر گرائے ہوئے عمود کا طول

$$= \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}\,\text{لا}_1 + \frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}}\,\text{ما}_1 + \frac{\text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$$

یا $\dfrac{\text{ا لا}_1 + \text{ب ما}_1 + \text{ج}}{\sqrt{\text{ا}^2+\text{ب}^2}}$ ہے۔

طریق دیگر۔ چونکہ $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$ کے علی القوائم خط کی مساوات $\text{ب}\,\text{لا} - \text{ا}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$ ہے اور ایسا خط جو نقطہ $\text{لا}_۱$، $\text{ما}_۱$ میں سے گزرتا ہے اِس کی مساوات $\text{ب}(\text{لا} - \text{لا}_۱) - \text{ا}(\text{ما} - \text{ما}_۱) = ۰$ ہے۔ اگر یہ عمودی خط دیے ہوئے خط سے نقطہ ک میں (جس کے محدّد $\text{لا}_۲$، $\text{ما}_۲$ ہیں) ملتا ہے تو چونکہ ک دونوں خطوط پر واقع ہے۔

لہذا $\text{ب}(\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱) - \text{ا}(\text{ما}_۲ - \text{ما}_۱) = ۰$ .... (۱)

اور $\text{ا}\,\text{لا}_۲ + \text{ب}\,\text{ما}_۲ + \text{ج} = ۰$ اس آخری مساوات کو ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ا}\,\text{لا}_۲ + \text{ب}\,\text{ما}_۲ + \text{ج} - (\text{ا}\,\text{لا}_۱ + \text{ب}\,\text{ما}_۱) = -(\text{ا}\,\text{لا}_۱ + \text{ب}\,\text{ما}_۱)$$

یا $\text{ا}(\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱) + \text{ب}(\text{ما}_۲ - \text{ما}_۱) = -(\text{ا}\,\text{لا}_۱ + \text{ب}\,\text{ما}_۱ + \text{ج})$ ...... (۲)

(۱) اور (۲) مساواتوں کے مربعوں کو جمع کرنے سے

$$(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)\left\{(\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱)^۲ + (\text{ما}_۲ - \text{ما}_۱)^۲\right\} = (\text{ا}\,\text{لا}_۱ + \text{ب}\,\text{ما}_۱ + \text{ج})^۲$$

لیکن $\text{ک ف} = \sqrt{(\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱)^۲ + (\text{ما}_۲ - \text{ما}_۱)^۲}$

$$\therefore \quad \text{ک ف} = \frac{\text{ا}\,\text{لا}_۱ + \text{ب}\,\text{ما}_۱ + \text{ج}}{\sqrt{(\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲)}}$$

پس اگر کسی خطِ مستقیم کی مساوات بشکل $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$ دی گئی ہے تو اِس سے کسی دیے ہوئے نقطہ کا عمودی فاصلہ، اس نقطہ کے محدّدوں کو جملہ $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} + \text{ج} = ۰$ میں تعویض کرنے اور لا اور ما کے سروں کے مربعوں کے حاصل جمع کے جذر المربع پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر $\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}$ کو ہمیشہ مثبت مانیں تو خط کی مثبت جانب کے کسی نقطہ سے گرائے ہوئے عمود کا طول مثبت ہوگا اور خط کی منفی جانب کے کسی نقطہ سے گرائے ہوئے عمود کا طول منفی ہوگا۔

(م) دیے ہوئے دو خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویوں کی

تنصیف کرنے والے خطوط کی مساواتیں۔

دو خطوطِ مستقیم کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرنے والے دو خطوں میں سے کسی ایک پر کے کوئی سے نقطہ سے جو عمود ان خطوطِ مستقیم پر گرائے جاتے ہیں بلحاظ مقدار ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

پس ان خطوط کی مساواتیں اگر

$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1 = 0 \ldots\ldots (1)$ اور $\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2 = 0 \ldots\ldots (2)$ ہوں

اور (لاَ، ماَ) کوئی سا نقطہ ان کے دو منصفوں میں سے کسی ایک منصف پر واقع ہو تو

$$\frac{\text{ا}_1\text{لاَ} + \text{ب}_1\text{ماَ} + \text{ج}_1}{\sqrt{\text{ا}_1^2 + \text{ب}_1^2}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ا}_2\text{لاَ} + \text{ب}_2\text{ماَ} + \text{ج}_2}{\sqrt{\text{ا}_2^2 + \text{ب}_2^2}}$$

بلحاظ مقدار مساوی ہونی چاہییں۔

پس نقطہ (لاَ، ماَ) مندرجۂ ذیل دو خطوطِ مستقیم میں سے کسی ایک خط پر ہونا چاہیے:

$$\frac{\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1}{\sqrt{\text{ا}_1^2 + \text{ب}_1^2}} = \pm \frac{\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2}{\sqrt{\text{ا}_2^2 + \text{ب}_2^2}} \ldots\ldots (3)$$

پس مساوات (۳) سے جن دو خطوط کی تعبیر ہوتی ہے وہ مطلوبہ منصف ہیں۔
ان دونوں منصفوں میں امتیاز کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے کہ اگر ہم دونوں نسب نماؤں کو مثبت مانیں اور مساوات (۳) میں اوپر والی علامت لیں تو

$\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1$ اور $\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2$ دونوں کے دونوں مثبت ہونگے یا منفی۔

اس لیے
$$\frac{\text{ا}_1\text{لا} + \text{ب}_1\text{ما} + \text{ج}_1}{\sqrt{\text{ا}_1^2 + \text{ب}_1^2}} = + \frac{\text{ا}_2\text{لا} + \text{ب}_2\text{ما} + \text{ج}_2}{\sqrt{\text{ا}_2^2 + \text{ب}_2^2}} \ldots (4)$$
میں

ہر ایک نقطہ دی ہوئی مساواتوں (یعنی (۱) اور (۲) مساواتوں) والے دونوں خطوط کی مثبت جانب ہوگا یا دونوں خطوط کی منفی جانب۔

اگر مساواتیں اس طرح لکھی جائیں کہ دونوں کی مستقل رقمیں مثبت ہیں، تو مبداء دونوں خطوط کی مثبت جانب ہے۔ پس مساوات (۴) اِس زاویہ کے منصف سے متعلق ہے جس کے اندر مبداء واقع ہے۔

(ن) دو دیے ہوئے خطوطِ مستقیم کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات۔

سب سے سیدھا طریقہ مطلوبہ مساوات کے حاصل کرنے کا یہ ہے کہ دیے ہوئے خطوط کا نقطۂ تقاطع (لاَ، ماَ) پہلے معلوم کر لیا جائے اور پھر اس نقطہ میں سے گزرنے والے خط کی عام مساوات بشکل ما - ماَ = م (لا - لاَ) استعمال کی جائے۔ لیکن بعض اوقات مندرجۂ ذیل طریقہ بہتر پایا جاتا ہے۔

فرض کرو ان دو خطوط کی مساواتیں $ا_1$ لا + $ب_1$ ما + $ج_1$ = ۰ ......(۱)

اور $ا_2$ لا + $ب_2$ ما + $ج_2$ = ۰ ......(۲) ہیں

اب مساوات $ا_1$ لا + $ب_1$ ما + $ج_1$ + لہ ($ا_2$ لا + $ب_2$ ما + $ج_2$) = ۰ ......(۳) پر غور کرو۔ چونکہ وہ پہلے درجہ کی ہے اِس لیے ایک خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔ اور اگر نقطہ (لاَ، ماَ) دونوں خطوط کا مشترک ہے تو

$ا_1$ لاَ + $ب_1$ ماَ + $ج_1$ = ۰ اور $ا_2$ لاَ + $ب_2$ ماَ + $ج_2$ = ۰

اور اس لیے ($ا_1$ لاَ + $ب_1$ ماَ + $ج_1$) + لہ ($ا_2$ لاَ + $ب_2$ ماَ + $ج_2$) = ۰۔ اور اس سے ظاہر ہے کہ نقطہ (لاَ، ماَ) مساوات (۳) والے خط پر واقع ہے۔

پس مساوات (۳) دیے ہوئے دو خطوط کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔ لہ کو اگر مناسب قیمت دی جائے تو اس مساوات سے کسی اور شرط کی بھی تکمیل کرائی جا سکتی ہے۔ مثلاً یہ خط کسی دوسرے دیے ہوئے نقطہ میں سے بھی گزارا جا سکتا ہے۔ پس مساوات (۳) لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے خطوط (۱) اور (۲) کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرنے والے تمام خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

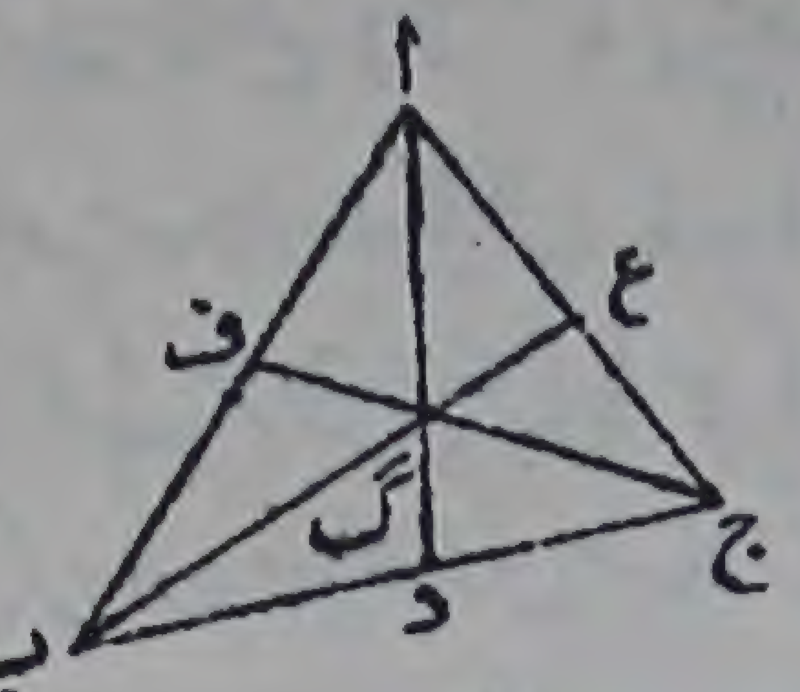
(س) اگر تین خطوطِ مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب $ا_1$ لا + $ب_1$ ما + $ج_1$ = ۰، $ا_2$ لا + $ب_2$ ما + $ج_2$ = ۰ اور $ا_3$ لا + $ب_3$ ما + $ج_3$ = ۰ ہوں اور اگر ہم لہ، مہ، نہ تین ایسے مستقل دریافت کر سکتے ہیں جن کے لیے رابطہ

لہ ($ا_1$ لا + $ب_1$ ما + $ج_1$) + مہ ($ا_2$ لا + $ب_2$ ما + $ج_2$) + نہ ($ا_3$ لا + $ب_3$ ما + $ج_3$) = ۰ ....(۱)

متماثلاً صحیح ہو یعنی لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہو تو یہ تینوں خطوطِ مستقیم

ایک نقطہ پر ملینگے ۔ کیونکہ اگر کسی نقطہ کے محدّد ان خطوط کی مساواتوں میں سے کوئی سی دو مساواتوں کی شرط کو پورا کرے تو رابطہ (۱) بتاتا ہے کہ وہ نقطہ تیسری مساوات کی شرط کو بھی پُورا کریگا ۔ یہ اصول بکثرت مستعمل ہے ۔

مثال ـــ مثلث کے زاویئی نقطوں کو اُن کے مقابل کے ضلعوں کے وسطی نقطوں سے ملانے والے خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں ۔



شکل ۱۳

شکل ۱۳ میں فرض کرو ا، ب، ج زاویئی نقطوں کے محدّد علی الترتیب ($\text{لا}_{۱}$، $\text{ما}_{۱}$)، ($\text{لا}_{۲}$، $\text{ما}_{۲}$) اور ($\text{لا}_{۳}$، $\text{ما}_{۳}$) ہیں ۔ تب ان کے مقابل کے ضلعوں کے وسطی نقطوں د، ع، ف کے محدّد علی الترتیب

$$\left(\frac{\text{لا}_{۲}+\text{لا}_{۳}}{۲}،\ \frac{\text{ما}_{۲}+\text{ما}_{۳}}{۲}\right)،\ \left(\frac{\text{لا}_{۳}+\text{لا}_{۱}}{۲}،\ \frac{\text{ما}_{۳}+\text{ما}_{۱}}{۲}\right) \text{ اور } \left(\frac{\text{لا}_{۱}+\text{لا}_{۲}}{۲}،\ \frac{\text{ما}_{۱}+\text{ما}_{۲}}{۲}\right) \text{ ہونگے}$$

پس خط اد کی مساوات

$$\frac{\text{ما}-\text{ما}_{۱}}{\frac{\text{ما}_{۲}+\text{ما}_{۳}}{۲}-\text{ما}_{۱}}=\frac{\text{لا}-\text{لا}_{۱}}{\frac{\text{لا}_{۲}+\text{لا}_{۳}}{۲}-\text{لا}_{۱}}\ \ldots\ldots\ldots (۱) \text{ ہوگی۔}$$

یعنی $\text{ما}(\text{لا}_{۲}+\text{لا}_{۳}-۲\text{لا}_{۱})-\text{لا}(\text{ما}_{۲}+\text{ما}_{۳}-۲\text{ما}_{۱})+\text{لا}_{۱}(\text{ما}_{۲}+\text{ما}_{۳})-\text{ما}_{۱}(\text{لا}_{۲}+\text{لا}_{۳})=۰$

اسی طرح ب ع اور ج ف کی مساواتیں علی الترتیب

$$\text{ما}(\text{لا}_{۳}+\text{لا}_{۱}-۲\text{لا}_{۲})-\text{لا}(\text{ما}_{۳}+\text{ما}_{۱}-۲\text{ما}_{۲})+\text{لا}_{۲}(\text{ما}_{۳}+\text{ما}_{۱})-\text{ما}_{۲}(\text{لا}_{۳}+\text{لا}_{۱})=۰$$

اور $\text{ما}(\text{لا}_{۱}+\text{لا}_{۲}-۲\text{لا}_{۳})-\text{لا}(\text{ما}_{۱}+\text{ما}_{۲}-۲\text{ما}_{۳})+\text{لا}_{۳}(\text{ما}_{۱}+\text{ما}_{۲})-\text{ما}_{۳}(\text{لا}_{۱}+\text{لا}_{۲})=۰$ ہونگی

اور چونکہ یہ مساواتیں جب جمع کی جاتی ہیں تو متماثلاً معدوم ہوجاتی ہیں، اس لیے وہ خطوط جن کو یہ تعبیر کرتی ہیں ایک نقطہ پر ملنے چاہییں ۔

[مساوات (۱) میں تعویض کرنے سے بآسانی معلوم ہوجائیگا کہ نقطہ گ جس کے محدّد $\frac{۱}{۳}(\text{لا}_{۱}+\text{لا}_{۲}+\text{لا}_{۳})$ اور $\frac{۱}{۳}(\text{ما}_{۱}+\text{ما}_{۲}+\text{ما}_{۳})$ ہیں خط اد پر واقع ہے ۔ اور اس نتیجہ کے تشاکل سے واضح ہے کہ گ خطوط ب ع اور ج ف پر بھی واقع ہے ۔]

(ع) ن ویں درجہ کی متجانس مساوات، مبداء میں سے گزرنے والے ن خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

فرض کرو کہ مساوات

ا $ما^{ن}$ + ب $ما^{ن-۱}$ لا + ج $ما^{ن-۲}$ $لا^{۲}$ + ... + ک $لا^{ن}$ = ۰ ...... (۱) ہے

اس کو $لا^{ن}$ پر تقسیم کرو تو

ا $\left(\frac{ما}{لا}\right)^{ن}$ + ب $\left(\frac{ما}{لا}\right)^{ن-۱}$ + ج $\left(\frac{ما}{لا}\right)^{ن-۲}$ + ... + ک = ۰ ..... (۲)

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں $م_۱$، $م_۲$، $م_۳$ ...... $م_ن$ ہیں۔

تب وہ اور ا $\left(\frac{ما}{لا} - م_۱\right)\left(\frac{ما}{لا} - م_۲\right)$ .... $\left(\frac{ما}{لا} - م_ن\right)$ = ۰

ایک ہی ہیں۔

اس لیے اس کی شرط تکمیل کو پہنچتی ہے جبکہ $\frac{ما}{لا} - م_۱ = ۰$، جبکہ $\frac{ما}{لا} - م_۲ = ۰$ وغیرہ

اور دوسری کسی صورت میں نہیں پہنچتی۔

پس مساوات (۱) جس طریق کو تعبیر کرتی ہے اس کے تمام نقطے مندرجۂ ذیل ن خطوطِ مستقیم میں سے ایک یا دوسرے خط پر واقع ہیں:

ما - $م_۱$ لا = ۰، ما - $م_۲$ لا = ۰، ......، ما - $م_ن$ لا = ۰

(ف) مساوات ا $لا^{۲}$ + ۲ ب لا ما + ج $ما^{۲}$ = ۰ کے ذریعہ جن دو خطوطِ مستقیم کی تعبیر کی جاتی ہے ان کے درمیانی زاویہ کی تعیین۔

اگر خطوط ما - $م_۱$ لا = ۰ اور ما - $م_۲$ لا = ۰ ہوں تو (ما - $م_۱$ لا) (ما - $م_۲$ لا) = ۰

اور دی ہوئی مساوات ($ما^{۲}$ + $\frac{۲ ب}{ج}$ لا ما + $\frac{ا}{ج}$ $لا^{۲}$ = ۰) دونوں ایک ہی ہیں۔

∴ $م_۱ + م_۲ = -\frac{۲ ب}{ج}$ ..... (۱) اور $م_۱ م_۲ = \frac{ا}{ج}$ ...... (۲)

اگر ان خطوط کے مابین زاویہ ط ہو تو مس ط = $\frac{م_۱ - م_۲}{۱ + م_۱ م_۲}$ = $\frac{۲ \sqrt{ب^{۲} - ا ج}}{ا + ج}$

از روئے رابطہ (١) اور (٢)

اگر ب^{2} - اج مثبت ہو تو خطوط حقیقی ہونگے ۔ اگر ب^{2} - اج = ٠ تو دونوں منطبق ہونگے ۔ اگر ب^{2} - اج منفی ہو تو خطوط خیالی ہونگے لیکن حقیقی نقطہ (٠، ٠) میں سے گزرینگے۔

مساوات ا لا^{2} + ٢ ب لا ما + ج ما^{2} = ٠ والے خطوط باہمدیگر علی القوائم ہونگے اگر ا + ج = ٠ یعنے اگر لا^{2} + ما^{2} کے سروں کا حاصل جمع صفر ہو گا۔

(ص) دوسرے درجہ کی عام مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرنے کی شرط کی تعیین۔

دوسرے درجہ کی عام ترین مساوات ا لا^{2} + ٢ح لا ما + ب ما^{2} + ٢گ لا + ٢ف ما + ج = ٠ ......(١) ہے

اگر یہ متماثلاً (ل لا + م ما + ن) (لَ لا + مَ ما + نَ) = ٠ ...(٢) کے مساوی ہے۔

تو (١) اور (٢) مساواتوں میں متعلقہ سروں کو مساوی لکھنے سے

ل لَ = ا ، م مَ = ب ، ن نَ = ج

م نَ + مَ ن = ٢ف ، ن لَ + نَ ل = ٢گ ، ل مَ + لَ م = ٢ح

آخر الذکر تین رابطوں کو مسلسل ضرب دینے سے

٨ف گ ح = ٢ل لَ م مَ ن نَ + ل لَ (م^{2} نَ^{2} + مَ^{2} ن^{2}) +

م مَ (نَ^{2} ل^{2} + ن^{2} لَ^{2}) + ن نَ (لَ^{2} م^{2} + ل^{2} مَ^{2})

= ٢ا ب ج + ا (٤ف^{2} - ٢ب ج) + ب (٤گ^{2} - ٢ج ا) + ج (٤ح^{2} - ٢ا ب)

پس ا ب ج - ا ف^{2} - ب گ^{2} - ج ح^{2} + ٢ف گ ح = ٠ .....(٣)

مطلوبہ شرط ہے۔

[الا اس صورت کے کہ جس میں لا^{2} اور ما^{2} کے سر دونوں صفر ہیں مندرجۂ بالا

نتیجہ دی ہوئی مساوات کو بطور لا اور ما کی دو درجی مساوات کے حل کرنے سے زیادہ سادگی کے ساتھ حاصل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو ا صفر نہیں ہے، تب اگر ہم مساوات کو بہ شکل ا لا۲ + لا (۲ ح ما + ۲ گ) + (ب ما۲ + ۲ ف ما + ج) = ۰ لکھ کر لا کی دو درجی مساوات کی طرح حل کریں تو

ا لا + ح ما + گ = ± √{ (ح۲ - ا ب) ما۲ + ۲ (ح گ - ا ف) ما + گ۲ - ا ج }

یہ مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ کی صورت میں تحویل پذیر ہونے کے لیے ضروری اور کافی ہوگا کہ جذر المربع کی علامت کے نیچے کی مقدار کامل مربع ہو۔ اس کے لیے شرط یہ ہے کہ

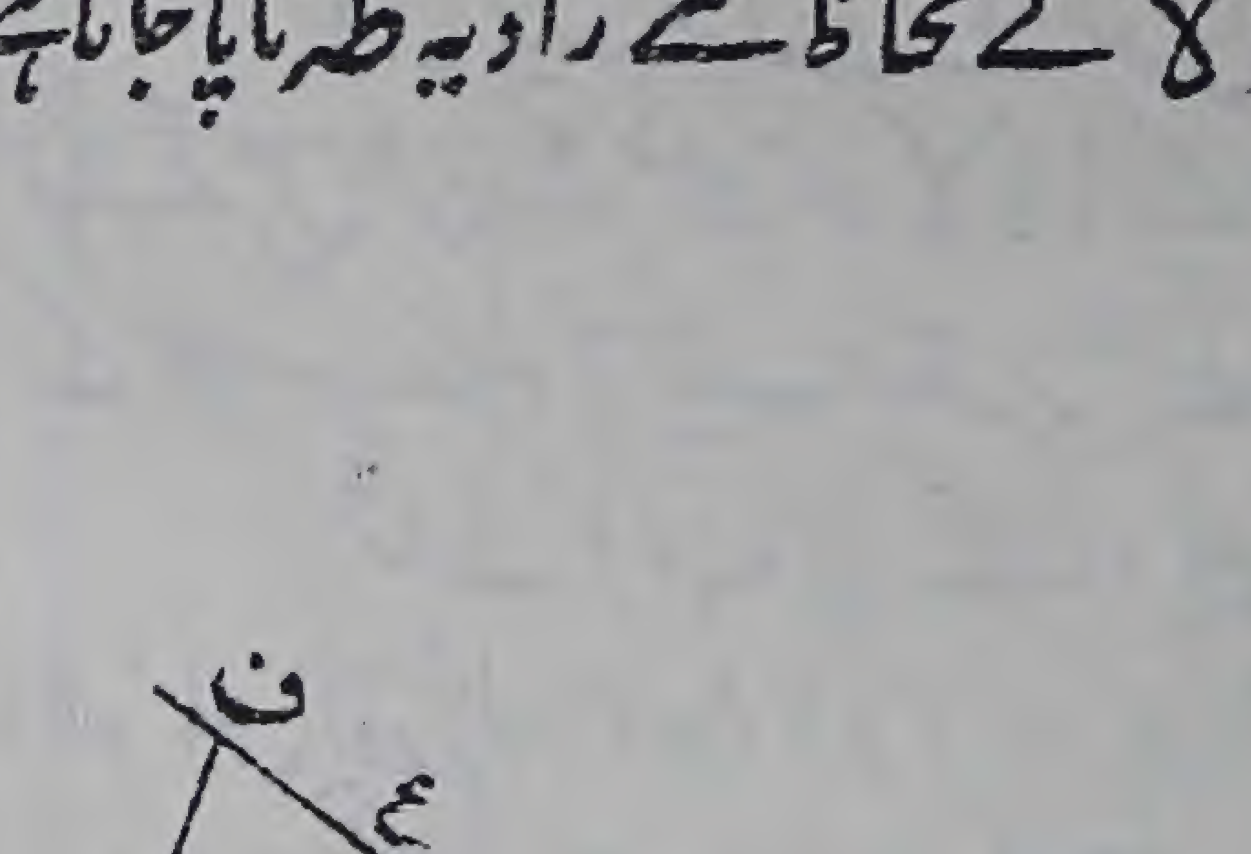
(ح۲ - ا ب) (گ۲ - ا ج) = (ح گ - ا ف)۲

اس کو پھیلا کر ا پر تقسیم کریں تو وہ (۳) کے معادل پائی جائیگی۔

(ق) خطِ مستقیم کی قطبی مساوات

فرض کرو و مبدا ہے اور محور و لا کے لحاظ سے زاویہ طہ ناپا جاتا ہے۔

دیے ہوئے خطِ مستقیم پر ف کوئی سا نقطہ ہے جس کے قطبی محدد ر اور طہ ہیں۔ شکل ۱۴۱۔



شکل ۱۴۱

مبدا سے خط پر عمود و ع گرایا جاتا ہے، و ع = ع اور زاویہ لا و ع = عہ

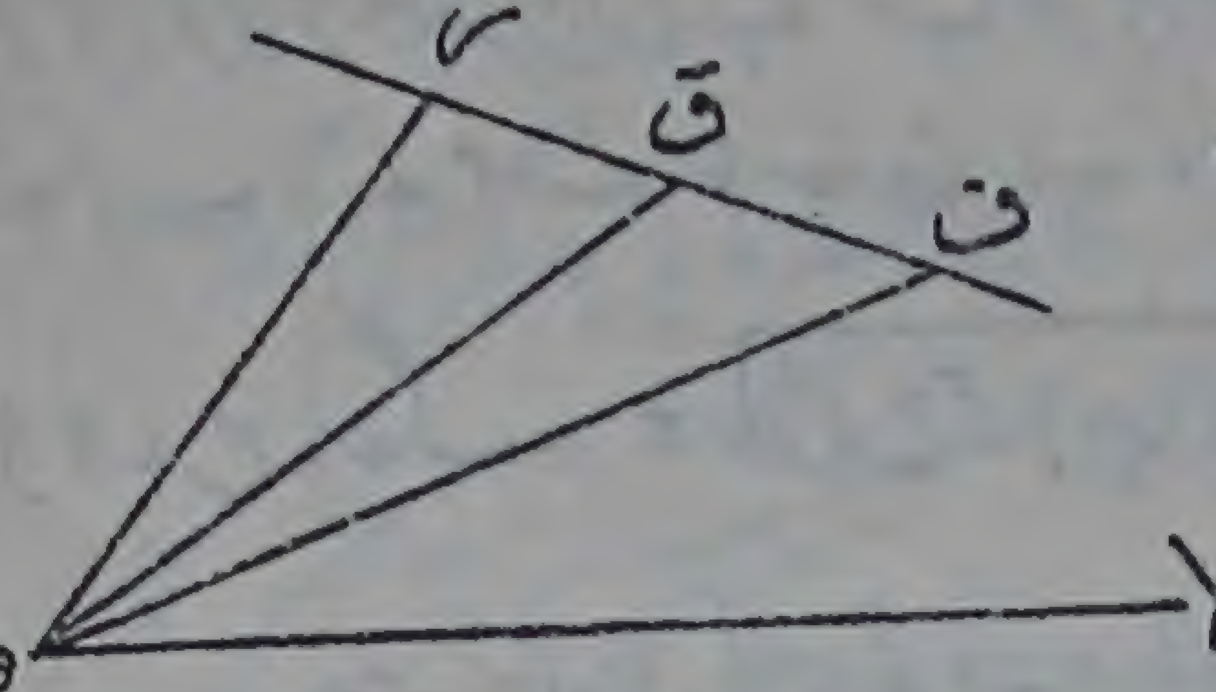
∠ ع و ف = (طہ - عہ) اور

و ف جم ع و ف = و ع

پس مطلوبہ مساوات = ر جم (طہ - عہ) = ع

خطِ مستقیم کی مساوات لا جم عہ + ما جب عہ = ع میں لا کے عوض ر جم طہ اور ما کے عوض ر جب طہ لکھنے سے بھی مصرحۂ بالا مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔

(۳) دیے ہوئے دو نقطوں میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی قطبی مساوات۔



شکل ۱۵

فرض کرو ف، ق دیے ہوئے دو نقطے ہیں جن کے محدد بالترتیب ر$_1$، طہ$_1$ اور ر$_2$، طہ$_2$ ہیں۔ اگر ر خطِ مستقیم پر کوئی سا دوسرا نقطہ ہے جس کے محدد ر، طہ ہیں تو

چونکہ △ ف و ق + △ ق و ر
- △ ف و ر = ۰

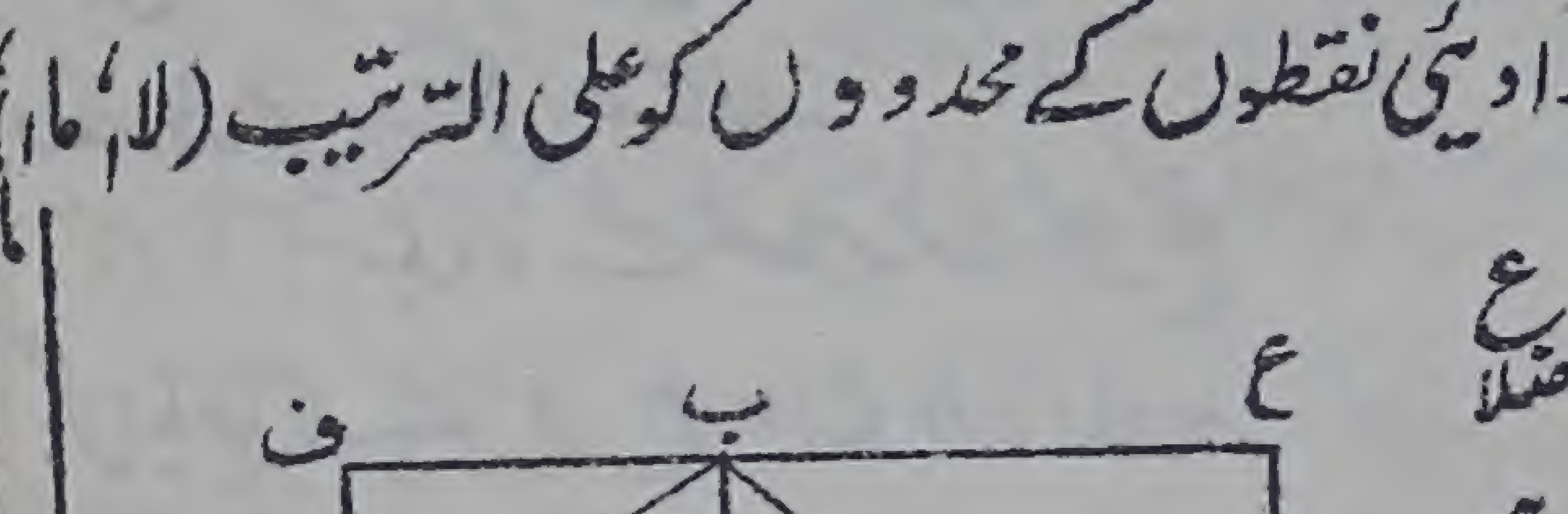
لہذا ر$_1$ ر$_2$ جیب (طہ$_2$ - طہ$_1$) + ر$_2$ ر جیب (طہ - طہ$_2$) - ر ر$_1$ جیب (طہ - طہ$_1$) = ۰

پس مطلوبہ مساوات = ر$_1$ ر$_2$ جیب (طہ$_2$ - طہ$_1$) + ر$_2$ ر جیب (طہ - طہ$_2$)
+ ر ر$_1$ جیب (طہ$_1$ - طہ) = ۰

(مش) ذیل میں چند اہم مثالیں حل کر کے بتائی جاتی ہیں :-

(۱) ایک مثلث کے ضلعوں پر بطور وتروں کے متوازی الاضلاع کھینچے جاتے ہیں جن کے ضلعے محور لا و ما کے متوازی ہیں۔ بتاؤ کہ ان متوازی الاضلاعوں کے دوسرے وتر ایک نقطہ پر ملینگے۔

مثلث ا ب ج کے زاویئی نقطوں کے محددوں کو علی الترتیب (لا$_1$، ما$_1$)، (لا$_2$، ما$_2$) اور (لا$_3$، ما$_3$) مانو۔



شکل ۱۶

شکل ۱۶ میں یہ متوازی الاضلاع بتائے گئے ہیں۔ ہمیں ثابت کرنا ہے کہ وتر ف ک، ع ح اور د گ ایک نقطہ پر ملینگے۔

چونکہ ف اور گ کے محدد (لا$_1$، ما$_2$) اور (لا$_1$، ما$_3$) ہیں۔

پس ف گ کی مساوات $\frac{\text{ما} - \text{ما}_2}{\text{ما}_1 - \text{ما}_2} = \frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_2 - \text{لا}_1}$ ہے۔

یعنے $\text{لا}(\text{ما}_1 - \text{ما}_2) + \text{ما}(\text{لا}_2 - \text{لا}_1) + \text{لا}_2\,\text{ما}_2 - \text{لا}_1\,\text{ما}_1 = 0$ ہے

اسی طرح و تر ع ح کی مساوات

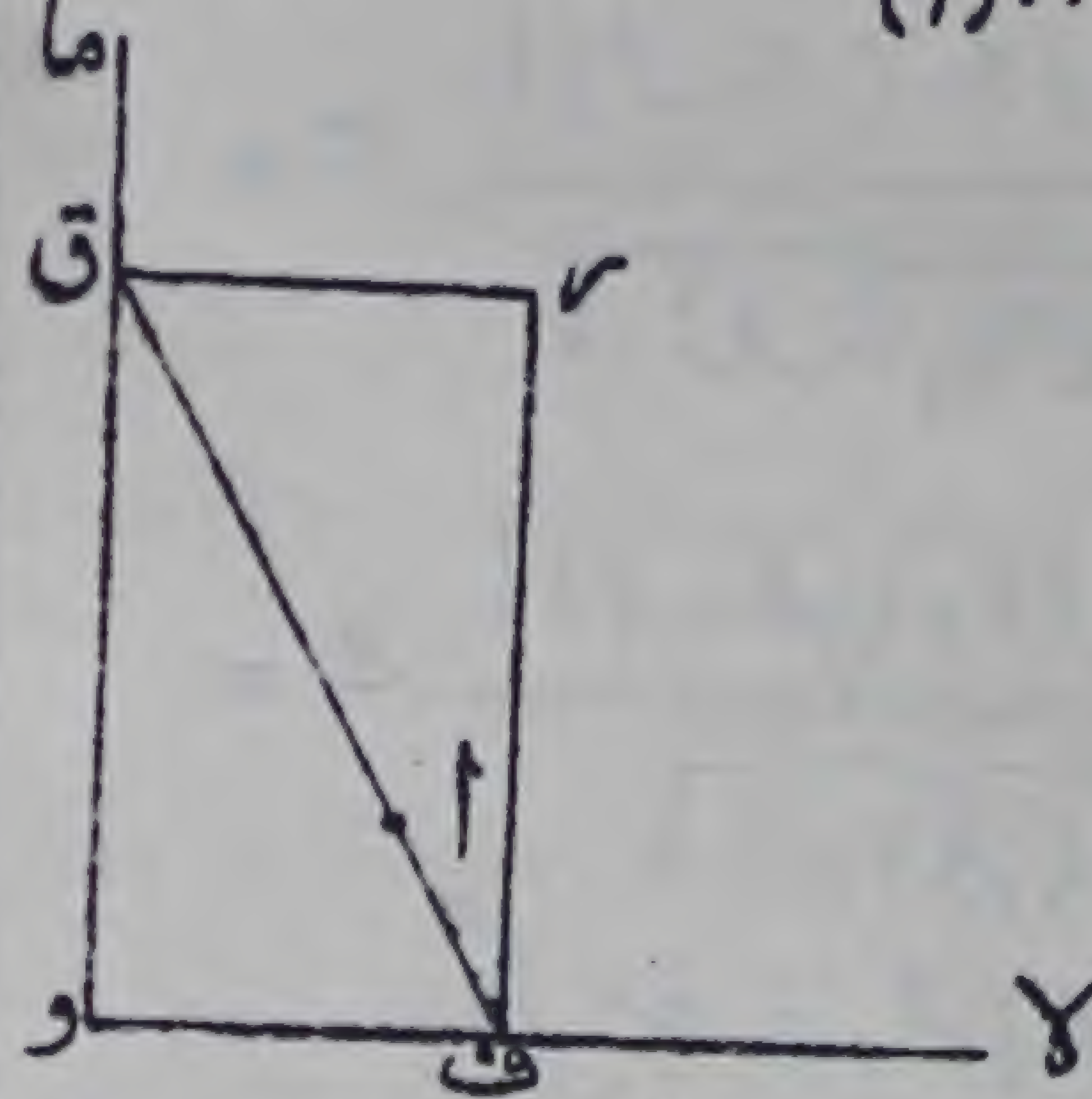
$\text{لا}(\text{ما}_2 - \text{ما}_3) + \text{ما}(\text{لا}_3 - \text{لا}_2) + \text{لا}_3\,\text{ما}_3 - \text{لا}_2\,\text{ما}_2 = 0$ ہے

اور و تر د گ کی مساوات $\text{لا}(\text{ما}_3 - \text{ما}_1) + \text{ما}(\text{لا}_1 - \text{لا}_3) + \text{لا}_1\,\text{ما}_1 - \text{لا}_3\,\text{ما}_3 = 0$ ہے

ان تینوں مساواتوں کا حاصل جمع متماثلاً صفر ہے لہذا یہ تینوں خطوطِ مستقیم ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۲) ایک ثابت نقطہ ا میں سے کوئی ساخطِ مستقیم کھینچا جاتا ہے جو محور لا و ما کو علی الترتیب خطوط ف اور ق میں قطع کرتا ہے اور متوازی الاضلاع و ف ر ق تکمل کر دیا جاتا ہے۔ ر کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ ا کے محدد ک اور گ ہیں۔ خط ف ق کی کسی ایک وضع میں اگر مساوات $\frac{\text{لا}}{\text{عہ}} + \frac{\text{ما}}{\text{بہ}} = 1$ ....(۱) مان لی جائے تو نقطہ ر کے محدد عہ اور بہ ہونگے۔



شکل ۱۷

لیکن چونکہ خط ف ق نقطہ ک، گ میں سے گزرتا ہے مساوات (۱) میں بجائے لا و ما ہم علی الترتیب ک و گ لکھ سکتے ہیں۔

پس $\frac{\text{ک}}{\text{عہ}} + \frac{\text{گ}}{\text{بہ}} = 1$ ......(۲)

اس لیے نقطہ ر کے محدد عہ اور بہ ہر صورت میں مساوات (۲) کی تصدیق کرینگے۔ ان کو اگر ہم لا و ما سے تعبیر کریں تو ر کے طریق کی مساوات $\frac{\text{ک}}{\text{لا}} + \frac{\text{گ}}{\text{ما}} = 1$ ہو گی۔

(۳) ایک مثلث ا ب ج کے زاویئ نقطوں کے محدد علی الترتیب $(\text{لا}_1, \text{ما}_1)$، $(\text{لا}_2, \text{ما}_2)$، $(\text{لا}_3, \text{ما}_3)$ ہیں۔ اس کے اندرونی اور جانبی دائروں کے

مرکز معلوم کرو۔

خط ب ج کی مساوات $\text{ما}(\text{لا}_2-\text{لا}_3)-\text{لا}(\text{ما}_2-\text{ما}_3)+\text{ما}_2\text{لا}_3-\text{لا}_2\text{ما}_3=0$ .... (۱) ہے

خط ج ا کی مساوات $\text{ما}(\text{لا}_3-\text{لا}_1)-\text{لا}(\text{ما}_3-\text{ما}_1)+\text{ما}_3\text{لا}_1-\text{لا}_3\text{ما}_1=0$ ..... (۲)

اور ا ب کی مساوات $\text{ما}(\text{لا}_1-\text{لا}_2)-\text{لا}(\text{ما}_1-\text{ما}_2)+\text{ما}_1\text{لا}_2-\text{لا}_1\text{ما}_2=0$ .... (۳)

ان خطوط پر اندرونی اور جانبی دائروں میں سے کسی بھی دائرے کے مرکز سے گرائے ہوئے عمود مقداراً ہیں مساوی ہیں پس ازروئے (ل) ان چار دائروں کے مرکزوں کے محدد مندرجۂ ذیل رابطوں کے لا اور ما ہیں

$$\pm\frac{\text{ما}(\text{لا}_2-\text{لا}_3)-\text{لا}(\text{ما}_2-\text{ما}_3)+\text{ما}_2\text{لا}_3-\text{لا}_2\text{ما}_3}{\sqrt{(\text{لا}_2-\text{لا}_3)^2+(\text{ما}_2-\text{ما}_3)^2}}$$

$$=\pm\frac{\text{ما}(\text{لا}_3-\text{لا}_1)-\text{لا}(\text{ما}_3-\text{ما}_1)+\text{ما}_3\text{لا}_1-\text{لا}_3\text{ما}_1}{\sqrt{(\text{لا}_3-\text{لا}_1)^2+(\text{ما}_3-\text{ما}_1)^2}}$$

$$=\pm\frac{\text{ما}(\text{لا}_1-\text{لا}_2)-\text{لا}(\text{ما}_1-\text{ما}_2)+\text{ما}_1\text{لا}_2-\text{لا}_1\text{ما}_2}{\sqrt{(\text{لا}_1-\text{لا}_2)^2+(\text{ما}_1-\text{ما}_2)^2}} \quad (۴)$$

اگر مثلث کے زاویئی نقطوں ا، ب، ج کے محددوں کو علی الترتیب مساوات (۱)، (۲) اور (۳) میں تعویض کریں تو ان سب کے سیدھے جانب کے جملے ایک ہی ہونگے۔ پس مثلث کے زاویئی نقطے یا تو سب کے سب خطوط (۱)، (۲)، (۳) کے مثبت جانب ہونگے یا سب کے سب ان کے منفی جانب۔ اندرونی دائرہ کے مرکز سے مثلث کے ضلعوں پر جو عمود ڈالے جاتے ہیں سب کے سب اسی سمت میں کھینچے جاتے ہیں جس سمت میں مثلث کے زاویئی نقطوں سے عمود۔ پس اندرونی دائرہ کے لیے روابط (۴) میں مثبت منفی کا جہاں اشتباہ بتایا گیا ہے

وہ سب مثبت ہونگے۔

جانبی تین دائروں کے لیے یہ علامتیں علی الترتیب − + +، + − + اور + + − ہونگی۔

روابط (۴) کی کسروں کے نسب نماؤں پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ وہ مثلث ا ب ج کے ضلعے ا ب ج ہیں۔

اگر (لا، ما) اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدد ہیں (یعنے روابط (۴) کی مثبتہ علامتوں میں سے صرف مثبت علامتیں لی جائیں) تو تینوں شمار کنندوں کا حاصل جمع = ۲$\triangle$ اور تینوں نسب نماؤں کا حاصل جمع = ا + ب + ج کیونکہ اس حاصل جمع میں لا اور ما کے سر دونوں صفر ہیں۔ پس نسبتوں کے خواص کی رُو سے دی ہوئی

$$\text{تینوں کسروں میں سے ہر ایک کسر} = \frac{2\triangle}{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}$$

اب شمار کنندوں اور نسب نماؤں کو سلسلہ وار لا۱، لا۲ اور لا۳ سے ضرب دو اور جمع کرو۔

$$\text{تب ہر ایک کسر} = \frac{2\triangle\,\text{لا}}{\text{ا}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{لا}_2 + \text{ج}\,\text{لا}_3}$$

$$\text{پس}\quad \frac{2\triangle}{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}} = \frac{2\triangle\,\text{لا}}{\text{ا}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{لا}_2 + \text{ج}\,\text{لا}_3}$$

$$\text{لہذا}\quad \text{لا}\,(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) = \text{ا}\,\text{لا}_1 + \text{ب}\,\text{لا}_2 + \text{ج}\,\text{لا}_3$$

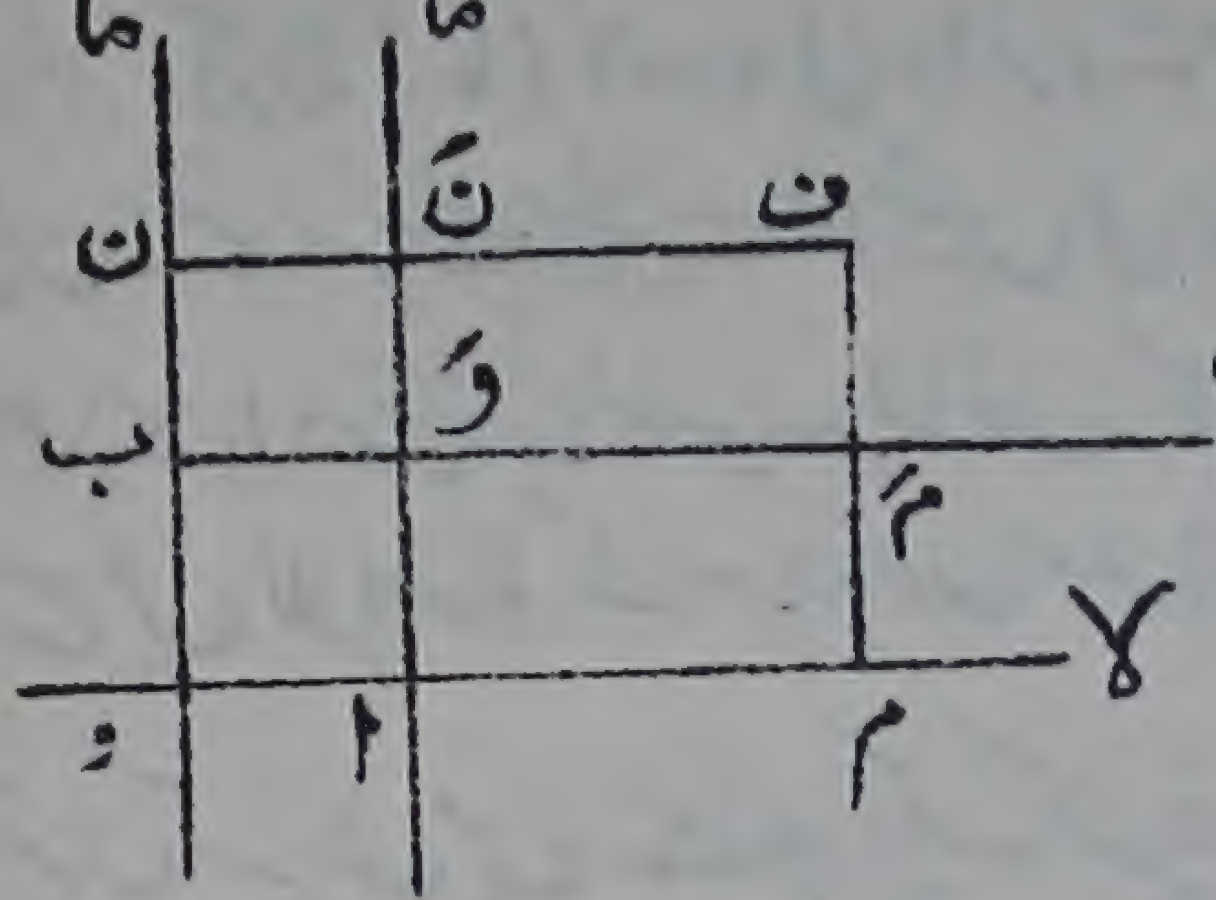
$$\text{اسی طرح}\quad \text{ما}\,(\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) = \text{ا}\,\text{ما}_1 + \text{ب}\,\text{ما}_2 + \text{ج}\,\text{ما}_3$$

ان دو مساواتوں سے مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدد، اس کے زاویئی نقطوں کے محددوں اور اس کے ضلعوں کے طولوں کی رقموں میں حاصل ہوتے ہیں۔

[واضح ہو کہ اوپر کی تین مثالوں کا حل نہ صرف علی القوائم محوروں کے لیے صحیح ہے بلکہ مائل محوروں کے لیے بھی۔]

(ت) محددوں کا استحالہ۔

جب محوروں کا انتخاب اختیاری ہوتا ہے تو ایسے محور منتخب ہو سکتے ہیں جن سے کسی مسئلہ کے حل کرنے میں بہت زیادہ سہولت حاصل ہو۔ کسی صورت میں بھی محوروں کی تبدیلی ایک خاص اہمیت رکھتی ہے۔ ہم اب بتائینگے کہ اگر کسی منحنی کی مساوات محوروں کے ایک نظام کے لحاظ سے دی گئی ہو تو ان کے کسی دوسرے نظام کے لحاظ سے اس مساوات کی کیا صورت ہوگی۔



شکل ۱۸

(۱) محددوں کے مبداء کی تبدیلی محوروں کی سمتوں کی تبدیلی بغیر۔

فرض کرو کہ ابتدائی محور و لا اور و ما تھے اور جدید محور وَ لاَ اور وَ مَاَ ہیں۔ دیکھو شکل ۱۸۔ نئے مبداء کے محدد ابتدائی محوروں کے حوالے سے ھ اور ک ہیں۔ ف دیے ہوئے منحنی کا ایک نقطہ ہے۔ چونکہ و ف اور وَ فَ کے ظل محور و لا پر مساوی ہیں، لہذا لا = لاَ + ھ

اسی طرح ما = مَاَ + ک

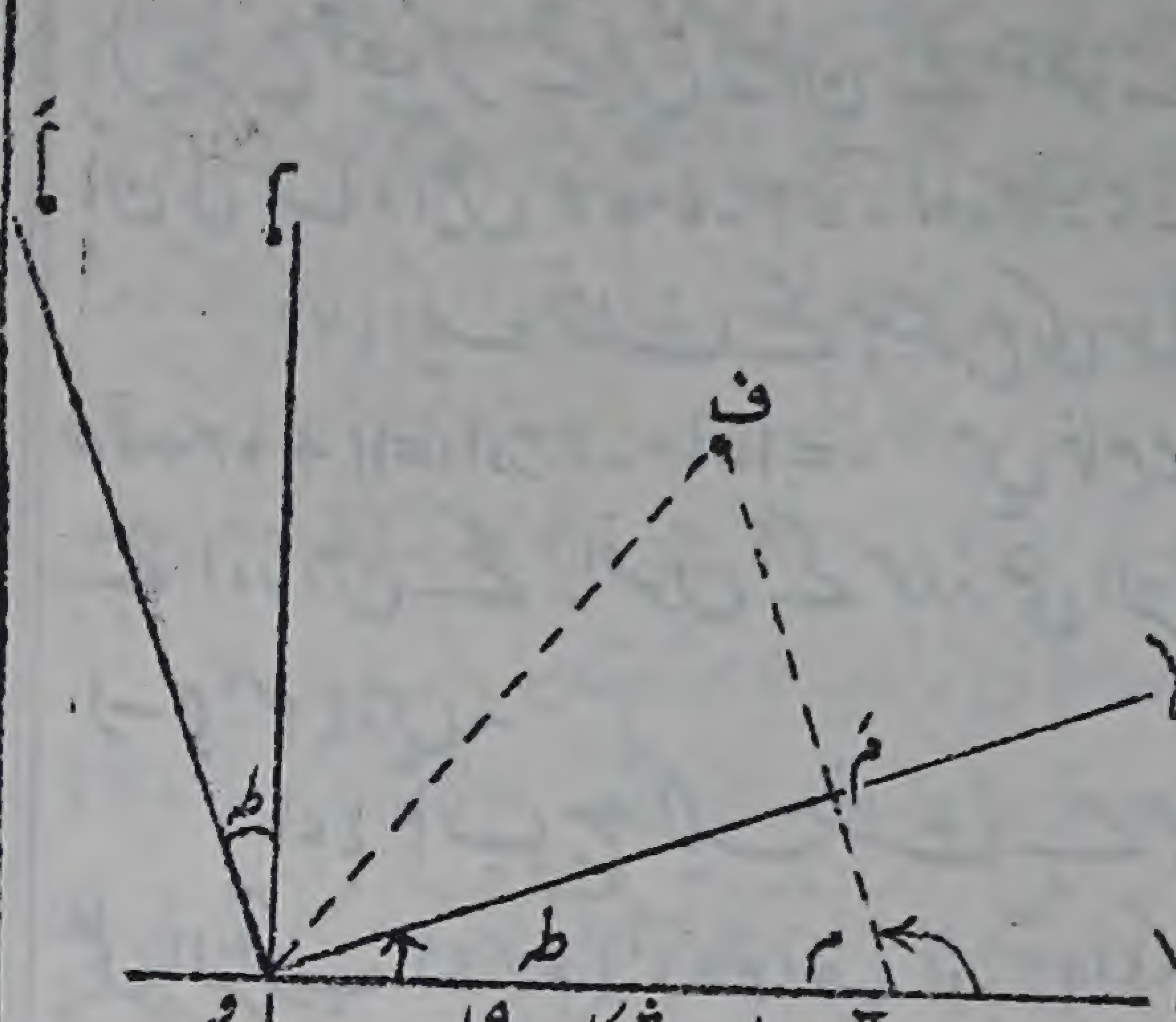
نئے محددوں کی رقموں میں منحنی کی مساوات حاصل کرنے کے لیے دی ہوئی مساوات میں ابتدائی محددوں کے عوض ان کی مندرجہ بالا قیمتیں درج کر دی جائیں۔

(۲) مبداء کی تبدیلی بغیر محوروں کا گھماؤ زاویہ ط میں۔

بہ لحاظ قدیم محور و لا، و ما۔

نقطہ ف کے محدد لا اور ما ہیں اور بلحاظ جدید محور (یعنے و لاَ، و ماَ) لاَ اور ماَ دیکھو شکل ۱۹۔

و ف خط کھینچو اور ف م محور و لاَ پر عمود گراؤ۔



شکل ۱۹

محور لا پر وف کا ظل =

وم کا ظل + مَ ف کا ظل

محور لا' پر وف کا ظل = لا'

وم کا ظل = لاَ جم طہ

اور مَ ف کا ظل =

ماَ جم ($\frac{\pi}{2}$ + طہ) = - ماَ جب طہ

پس لا = لاَ جم طہ - ماَ جب طہ

اسی طرح چونکہ وف کا ظل محور و ما پر = وم کا ظل + مَ ف کا ظل

لہذا ما = لاَ جم ($\frac{\pi}{2}$ - طہ) + ماَ جم طہ = لاَ جب طہ + ماَ جم طہ

دی ہوئی مساوات میں لا اور ما کی یہ جدید قیمتیں درج کرنے سے منحنی کی مساوات نئے محوروں کے حوالہ سے حاصل ہو جاتی ہے۔

مثالیں

(۱) مثلث کے ہندسی مرکز (یعنے اس کے وسطانیوں کے نقطۂ تقاطع) کے محدد دریافت کرو۔

(۲) وہ خطِ مستقیم جو نقطوں (۵، ۰)، (۰، -۲) میں سے گزرتا ہے نقطوں (۱۵، ۴) اور (-۵، -۴) میں سے بھی گزرتا ہے۔

(۳) مساوات ۵ لا + ۱۲ ما - ۲۶ = ۰ کو لا جم عہ + ما جب عہ - ع = ۰ کی صورت میں تبدیل کر کے ثابت کرو کہ ع کی قیمت ۲ ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ خط ما - لا + ۲ = ۰ نقطوں (۳، -۱) اور (۸، ۹) کو ملانے والے خط کو ۲ : ۳ کی نسبت میں قطع کرتا ہے۔

(۵) دو خطوطِ مستقیم نقطہ (۴، -۳) میں سے گزرتے ہیں اور محوروں کو

اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ان کے مقطوعے مقدار میں مساوی ہیں۔ بتاؤ کہ ان کی مساواتیں لا + ما - ۱ = ۰ اور لا - ما - ۷ = ۰ ہیں۔

(۶) ایک مثلث کے اضلاع کی مساواتیں لا - ۷ ما + ۲۵ = ۰، ۵لا + ۳ ما + ۱۱ = ۰ اور ۳لا - ۲ما - ۱ = ۰ ہیں ثابت کرو کہ مبدا مثلث کے اندر واقع ہے اور اس کے راسوں کے محدد علی الترتیب (-۱، -۲)، (۳، ۴) اور (-۴، ۳) ہیں۔

(۷) آ ب ج ایک مثلث ہے جس کے زاویئی نقطوں کے محدد علی الترتیب (۱، ۲)، (۲۵، ۸) اور (۹، ۲۱) ہیں۔ بتاؤ کہ اس کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدد ۵ر۱۱ اور ۱۱ ہیں۔

(۸) تین خطوط کی مساواتیں ما = م۱ لا + ج۱ ، ما = م۲ لا + ج۲ اور ما = م۳ لا + ج۳ ہیں۔ ان سے جو مثلث تیار ہوتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۹) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس سے جو عمود دیے ہوئے دو خطوطِ مستقیم پر گرائے جاتے ہیں ان کے طولوں کا حاصل جمع مستقل ہے بتاؤ کہ نقطہ کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ کسی بھی مثلث کے ضلعوں کے عمودی منصف ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۱۱) ثابت کرو کہ مثلث کے راسوں سے ان کے مقابل کے ضلعوں پر جو عمود گرائے جاتے ہیں وہ سب ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۱۲) وہ تمام خطوط جن کے لیے ۱/ا + ۱/ب = مستقل، سب کے سب ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔ اس نقطہ کے محدد معلوم کرو۔ ا اور ب باہمدیگر علی القوائم محوروں کے مقطوعے ہیں۔

[اس مثال سے پتلے عدسہ کے ماسکی طول کی پیمائش کا اچھا طریقہ ہاتھ آتا ہے، اس کی توضیح کرو۔]

(۱۳) چوتھے سوال کی عمومی صورت کو پیش نظر رکھ کر لینے خط کی مساوات ا لا + ب ما + ج = ۰ اور نقطوں کے محددوں کو (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) مان کر

ثابت کرو کہ کوئی سا خطِ مستقیم کسی مثلث کے ضلعوں ف$_1$ ف$_2$، ف$_2$ ف$_3$ اور ف$_3$ ف$_1$ کو نقطوں ل، م اور ن پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ

$$\frac{\text{ف}_1\text{ل}}{\text{ل ف}_2} \times \frac{\text{ف}_2\text{م}}{\text{م ف}_3} \times \frac{\text{ف}_3\text{ن}}{\text{ن ف}_1} = -1$$

(۱۴) ثابت کرو کہ مساوات لا^2 + لا ما − ۶ ما^2 + ۷ لا + ۳۱ ما − ۱۸ = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جن کا درمیانی زاویہ ۴۵° ہے۔

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر لہ = ۲ تو مساوات ۱۲ لا^2 − ۱۰ لا ما + ۲ ما^2 + ۱۱ لا − ۵ ما + لہ = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اور ان کا درمیانی زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{1}{2}$ ہے۔

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات ب لا^2 − ۲ ھ لا ما + ا ما^2 = ۰ دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو علی الترتیب خطوط ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ کے علی القوائم ہیں۔

(۱۷) ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے۔ ا کو قطب اور ا ب کو حوالہ کا خط مان کر متوازی الاضلاع کے چار ضلعوں اور اس کے دو وتروں کی قطبی مساواتیں دریافت کرو۔

(۱۸) ثابت کرو کہ خطوطِ مستقیم ا لا^2 + ۲ ھ لا ما + ب ما^2 = ۰ اور ل لا + م ما + ن = ۰ سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ =

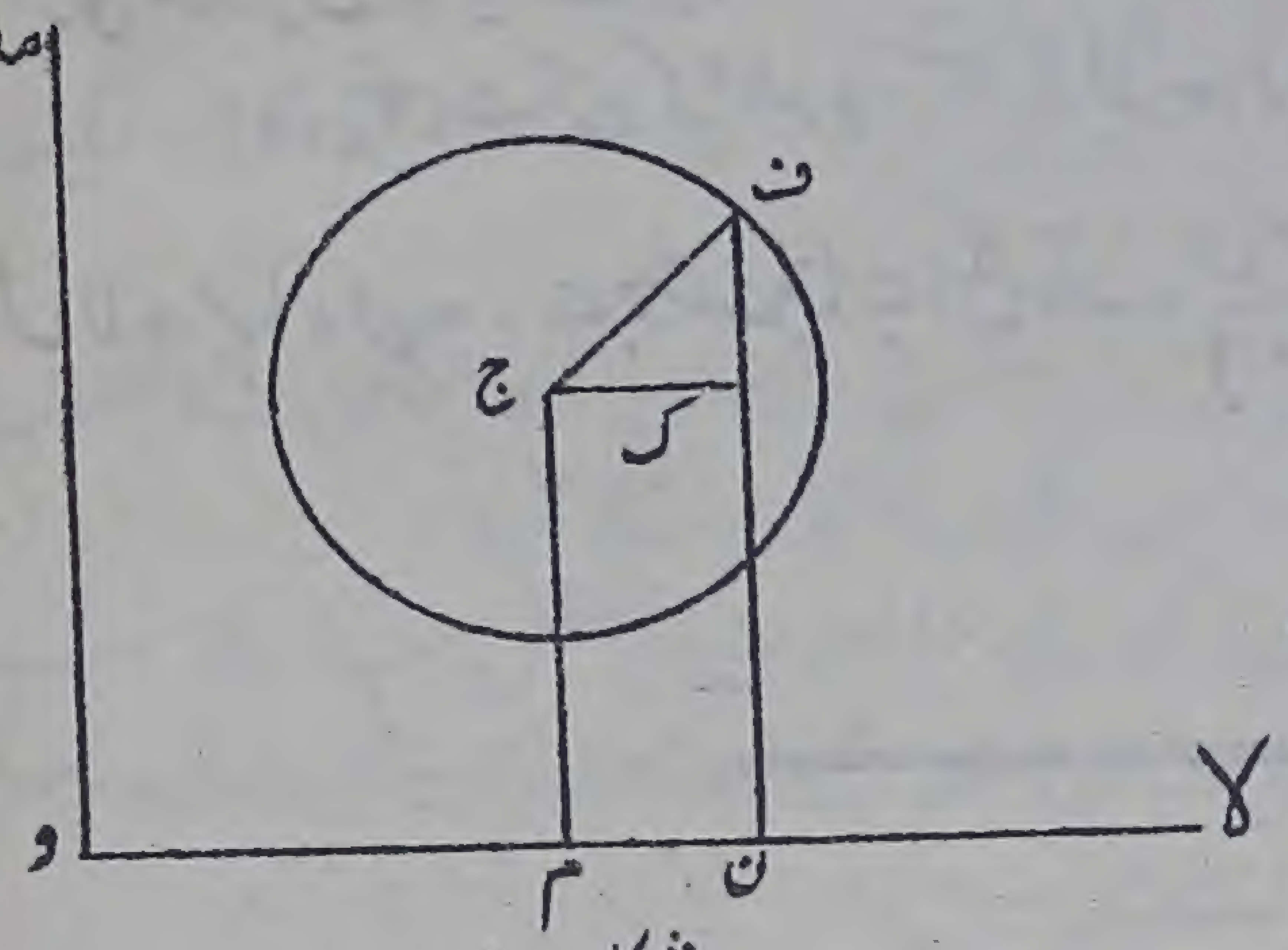
$$\frac{\text{ن}^2\sqrt{\text{ھ}^2 - \text{ا ب}}}{\text{ا م}^2 - 2\,\text{ھ ل م} + \text{ب ل}^2}$$

ساتواں باب

دائرہ کی مساواتیں

۵۸ (ا)۔ دائرہ کی مساوات علی القوائم محوروں کے حوالہ سے

فرض کرو شکل ع۲۰ میں دائرہ کا مرکز ج ہے اور ف اس کے محیط پر کوئی سا نقطہ ہے۔ ج کے محدد عہ اور بہ مانو اور ف کے محدّد لا اور ما۔ دائرہ کا نصف قطر ص فرض کرو۔ ج م، ف ن محور وما کے متوازی کھینچو اور ج ک محور ولا کے متوازی۔ تب



شکل ع۲۰

$$ج ک^2 + ک ف^2 = ج ف^2$$

لیکن ج ک = لا ۔ عہ اور ک ف = ما ۔ بہ

$$\therefore \ (لا - عہ)^2 + (ما - بہ)^2 = ص^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

یہ دائرہ کی مطلوبہ مساوات ہے۔

اگر محدّدوں کا مبداء خود مرکزِ دائرہ مانا جائے تو عہ اور بہ دونوں صفر ہونگے اور مساوات حسب ذیل ہوگی:۔

لا^2 + ما^2 = ص^2 . . . . (۲)

مساوات (۱) کو پھیلانے سے لا^2 + ما^2 − ۲ عہ لا − ۲ بہ ما + عہ^2 + بہ^2 − ص^2 = ۰ ہو جاتی ہے۔ اور یہ لا^2 + ما^2 + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ . . . . . (۳) کی ہم شکل ہے جس میں گ، ف اور ج مستقل ہیں۔

پس مساوات (۳) دائرہ کی عام مساوات مانی جاتی ہے۔ اس لیے کہ وہ بہ صورت

(لا + گ)^2 + (ما + ف)^2 = گ^2 + ف^2 − ج لکھی جا سکتی ہے اور اس آخری مساوات سے ظاہر ہے کہ مساوات (۳) کے طریق پر اگر کوئی سا نقطہ لیا جائے تو نقطہ (−گ، −ف) سے اس کا فاصلہ مستقل اور $\sqrt{}$(گ^2 + ف^2 − ج) کے مساوی ہوتا ہے۔ پس مساوات مذکور ایسے دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا مرکز نقطہ (−گ، −ف) ہے اور نصف قطر $\sqrt{}$(گ^2 + ف^2 − ج) ہے۔

اگر گ^2 + ف^2 − ج = ۰ تو نصف قطر صفر ہے اور دائرہ ایک نقطئی دائرہ کہلاتا ہے۔

اگر گ^2 + ف^2 − ج منفی ہو تو لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں اس دائرہ کے لیے صادق نہ آئینگی اس لیے وہ دائرہ خیالی کہلائیگا۔

امور مندرجۂ بالا سے واضح ہے کہ دوسرے درجہ کی کوئی سی مساوات دائرہ کو تعبیر کریگی بشرطیکہ

(۱) لا^2 اور ما^2 کے سر مساوی ہوں اور (۲) اس مساوات میں حاصل ضرب لا ما رکھنے والی کوئی رقم شامل نہیں ہے۔

چونکہ دائرہ کی عام مساوات میں تین مستقل ہیں اس لیے اگر تین دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والی یا کوئی دوسرے شرایط کو پورا کرنے والی دائرہ کی مساوات معلوم کرنا ہو تو مصرحۂ بالا مساوات کو فرض کر کے دیے ہوئے شرائط کے لحاظ سے گ، ف، ج مستقلوں کی قیمتیں دریافت کر لی جاتی ہیں۔

(ب) منحنی کے مماس اور عماد - فرض کرو کہ کسی منحنی پر کبھی دو نقطے ف، ق، لیے جاتے ہیں اور ق منحنی پر حرکت کر کے ف کے قریب تر ہوتا جاتا ہے اور بالآخر اس سے منطبق ہوتا ہے - تب خط ف ق اس انتہائی وضع میں منحنی کا نقطہ ف پر کا مماس کہلاتا ہے۔

اور ف پر جو خط اس مماس کے علی القوائم کھینچا جاتا ہے منحنی کا اس نقطہ پر کا عماد کہلاتا ہے۔

(۱) دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$ کے کسی نقطہ پر کے خطِ مماس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ اس پر کے دو نقطوں کے محدد لا_1، ما_1 اور لا_2، ما_2 ہیں - ان میں سے گزرنے والے قاطع کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_1 - \text{لا}_2} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_1 - \text{ما}_2} \quad \ldots\ldots (1)$$ ہے۔

چونکہ یہ دونوں نقطے دائرہ پر واقع ہیں لہذا $\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 = \text{ص}^2$ اور $\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 = \text{ص}^2$

پس $\text{لا}_1^2 - \text{لا}_2^2 = \text{ما}_2^2 - \text{ما}_1^2 \quad \ldots\ldots (2)$

(۱) اور (۲) مساواتوں کے متناظر پہلوؤں کے جملوں کو آپس میں ضرب دو تو

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_1 + \text{لا}_2) = -(\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما}_1 + \text{ما}_2) \quad \ldots\ldots (3)$$

اب لا_2، ما_2 کو دائرہ پر لا_1، ما_1 کے قریب تر ہٹاتے جاؤ یہاں تک کہ وہ بالآخر لا_1، ما_1 سے منطبق ہو جائے۔

تب اس انتہائی وضع میں وتر نقطہ لا_1، ما_1 پر کا خطِ مماس بن جاتا ہے
پس مساوات (۳) میں $\text{لا}_2 = \text{لا}_1$ اور $\text{ما}_2 = \text{ما}_1$ لکھنے سے نقطہ لا_1، ما_1 پر کے مماس کی مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔ یعنے

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)\,\text{لا}_1 + (\text{ما} - \text{ما}_1)\,\text{ما}_1 = 0$$

یا $\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 = \text{ص}^2 \quad \therefore \text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ص}^2$

اگر دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}\,\text{لا} + 2\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$ مانی جائے تو پہلے کی طرح لا_1، ما_1 اور لا_2، ما_2 نقطوں میں سے گزرنے والے قاطع کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_1 - \text{لا}_2} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_1 - \text{ما}_2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$ ہوگی

اور چونکہ یہ نقطے دائرہ پر ہیں لہٰذا $\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + 2\text{گ}\,\text{لا}_1 + 2\text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ج} = 0$

اور $\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 + 2\text{گ}\,\text{لا}_2 + 2\text{ف}\,\text{ما}_2 + \text{ج} = 0$

$$\therefore (\text{لا}_1 - \text{لا}_2)(\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + 2\text{گ}) = -(\text{ما}_1 - \text{ما}_2)(\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + 2\text{ف}) \ldots\ldots (2)$$

(۱) اور (۲) مساواتوں کے متناظر پہلوؤں کے جملوں کو باہم دیگر ضرب دینے سے قاطع کی مساوات

$$(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_1 + \text{لا}_2 + 2\text{گ}) = -(\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + 2\text{ف})$$

برآمد ہوتی ہے۔

پس نقطہ لا_1، ما_1 پر کے خط مماس کی مساوات $(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_1 + \text{گ}) + (\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما}_1 + \text{ف}) = 0$ ہے

یعنی $\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 + \text{گ}\,\text{لا} + \text{ف}\,\text{ما} = \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + \text{گ}\,\text{لا}_1 + \text{ف}\,\text{ما}_1$

اب مساوات کے دونوں جانب $\text{گ}\,\text{لا}_1 + \text{ف}\,\text{ما}_1 + \text{ج}$ اضافہ کرو۔

چونکہ لا_1، ما_1 دائرہ پر واقع ہے لہٰذا مماس کی مساوات

$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 + \text{گ}(\text{لا} + \text{لا}_1) + \text{ف}(\text{ما} + \text{ما}_1) + \text{ج} = 0$ ہو جاتی ہے جس سے واضح ہے کہ دائرہ کے کسی نقطہ لا_1، ما_1 پر کے خط مماس کی مساوات، دائرہ کی مساوات میں لا^2 کے عوض $\text{لا}\,\text{لا}_1$، ما^2 کے عوض $\text{ما}\,\text{ما}_1$، 2لا کے عوض $(\text{لا} + \text{لا}_1)$ اور 2ما کے عوض $(\text{ما} + \text{ما}_1)$ لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۲) دائرہ کے کسی نقطہ پر کے عمود کی مساوات۔ فرض کرو دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$ پر نقطہ لا_1، ما_1 واقع ہے۔ اس نقطہ پر کے خط مماس کی مساوات $\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ص}^2$ ہے اور جو کوئی خط اس مماس کے علی القوائم ہوگا اس کی مساوات $= \text{ما}\,\text{لا}_1 - \text{لا}\,\text{ما}_1 + \text{م} = 0$ جس میں م مستقل ہے۔

جب نقطہ لا$_1$، ما$_1$ اس خط پر واقع ہوتا ہے تو

ما$_1$ لا$_1$ - لا$_1$ ما$_1$ + مر = ۰ یعنے مر = ۰

پس دائرہ کے نقطۂ لا$_1$، ما$_1$ پر کے عمود کی مساوات ما$_1$ لا - لا$_1$ ما = ۰ ہے
اس مساوات سے ظاہر ہے کہ دائرہ کا عمود مبداء میں سے گزرتا ہے یعنے مرکز میں سے۔

(ج) ایک دیے ہوئے خطِ مستقیم اور دائرہ کے تقاطع کے نقطوں کی تعیین۔

دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 = ص^2 مانو اور خطِ مستقیم کی مساوات ما = مر لا + ج جو نقطے خطِ مستقیم اور دائرہ کے مشترک ہونگے ان کے لیے یہ دونوں مساواتیں صادق آئینگی۔ پس چونکہ خطِ مستقیم کی مساوات ما^2 = (مر لا + ج)^2 لکھی جاسکتی ہے لہذا ان مشترک نقطوں کے لیے

ما^2 = (مر لا + ج)^2 = ص^2 - لا^2

یعنے لا^2 (۱ + مر^2) + ۲ مر ج لا + ج^2 - ص^2 = ۰ ...... (۱)

یہ دو درجی مساوات ہے جس کی دو اصلیں، حقیقی اور مختلف، حقیقی اور مساوی یا خیالی ہونگی۔

پس لا کی دو قیمتیں ہونگی اور ان کو مساوات ما = مر لا + ج میں یہ قیمتیں درج کرنے سے ما کی بھی دو قیمتیں برآمد ہونگی۔ اس لیے ہر خطِ مستقیم دائرہ سے دو حقیقی اور امتیاز پذیر نقطوں میں یا دو منطبق نقطوں میں یا دو خیالی نقطوں میں ملتا ہے۔ خیالی نقطوں سے مراد وہ نقطے ہیں جن کے محدّد خیالی ہیں۔

مساوات (۱) کی اصلیں باہمدیگر مساوی ہونگی اگر

(۱ + مر^2) (ج^2 - ص^2) = مر^2 ج^2

یعنے اگر ج^2 = ص^2 (۱ + مر^2) (۲)

جب لا کی دونوں قیمتیں مساوی ہونگی تو ما کی دونوں قیمتیں بھی باہمدیگر

مساوی ہونگی۔

اس لیے خط ما = مر لا + ج اور دائرہ لا^2 + ما^2 = ص^2 کے تقاطع کے نقطے منطبق ہونگے اگر ج = ص $\sqrt{(\text{۱ + مر}^2)}$۔ پس خطِ مستقیم ما = مر لا + ص $\sqrt{\text{۱ + مر}^2}$ دائرہ لا^2 + ما^2 = ص^2 کو مر کی جملہ قیمتوں کے لیے مس کریگا۔

چونکہ $\sqrt{\text{۱ + مر}^2}$ کی علامت مثبت یا منفی مانی جاسکتی ہے اس لیے مر کی ہر قیمت کے لیے دائرہ کے دو خطوط مماس ہونگے یعنے کسی دیے ہوئے خطِ مستقیم کے متوازی دائرہ کے دو مماسی خط ہوتے ہیں۔

(د) دائرہ کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں کے طریق کی تعیین۔

مرکزِ دائرہ کو مبداء اور محور و لا کو وتروں کا متوازی مانو۔ تب دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 = ص^2 ہوگی اور وتروں کے نظام میں سے کسی ایک وتر کی مساوات ما - ج = ۰ لی جاسکتی ہے جہاں یہ دونوں ملینگے وہاں

لا^2 + ج^2 = ص^2 ∴ لا = ± $\sqrt{\text{ص}^2 - \text{ج}^2}$

چونکہ لا کی یہ دونوں قیمتیں مساوی اور مخالف ہیں اس لیے یہ نتیجہ مترتب ہوتا ہے کہ وتر کے وسطی نقطہ کا فصلہ یا مقطوعہ صفر ہوتا ہے یعنے یہ وسطی نقطہ ہمیشہ محور و ما پر واقع ہوتا ہے۔ ج کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔ اگر ج > ص تو لا کی دونوں قیمتیں خیالی ہوتی ہیں لیکن بر نہیم ان کا حاصل جمع صفر ہی ہوتا ہے۔ اور اس لیے وتر کا وسطی نقطہ اس صورت میں بھی ما کے محور پر واقع ہوتا ہے۔

پس دائرہ کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو مرکز سے ان پر علی القوائم کھینچا جاتا ہے۔ یہ ضروری نہیں کہ اس طریق کو صرف اس کے اس جزو تک محدود سمجھیں جو دائرہ کے اندر واقع ہے۔

(ہ) اب تک صرف دائرہ کی عام تعریف کو (یعنے یہ کہ اس کے مرکز سے اس کے محیط کے کسی بھی نقطہ کا فاصلہ مستقل ہے) مان کر نتائج حاصل

کیے گئے۔ اس کی کسی ہندسی خاصیت سے مدد نہیں لی گئی۔ اگر ان سے استفادہ کیا جائے تو بعض نتائج زیادہ آسانی کے ساتھ برآمد ہو سکتے ہیں۔ مثلاً دائرہ پر کے کسی نقطہ کے خطِ مماس کی مساوات کے لیے دائرہ کی اس خاصیت سے مدد لی جاسکتی ہے کہ وہ اس نقطہ کو مرکز سے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔ چنانچہ آخر الذکر خط کی مساوات $\frac{\text{لا}}{\text{لا}_1} - \frac{\text{ما}}{\text{ما}_1} = ۰$ ہے جس میں لا_1، ما_1 دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد ہیں۔ اور اس کے علی القوائم خط کی مساوات جو لا_1، ما_1 میں سے گزرتا ہے $\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 - \text{ص}^2 = ۰$ ہے۔

ایک دوسری مثال کے طور پر یہ معلوم کرنے کے لئے کہ خط $\text{ما} = \text{مر}\,\text{لا} + \text{ج}$ دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$ کو کسی شرط کے تحت مس کریگا۔ ہم دائرہ کی اس ہندسی خاصیت کو کام میں لاسکتے ہیں کہ ایسی صورت میں دیے ہوئے خط کا فاصلہ مرکز سے نصف قطر کے مساوی ہوتا ہے۔

پس شرط یہ ہے کہ $\pm \frac{\text{ج}}{\sqrt{۱ + \text{مر}^2}}$ فاصلہ ص کے مساوی ہو یعنے

$$\text{ج} = \pm\, \text{ص} \sqrt{۱ + \text{مر}^2}$$

(۵) کسی بھی نقطہ سے دائرہ کے دو خطِ مماس کھینچے جاسکتے ہیں جو حقیقی ہونگے اگر نقطہ دائرہ کے باہر ہوگا، منطبق اگر نقطہ دائرہ پر ہوگا اور خیالی اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہوگا۔

دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$ مانو اور کسی بھی نقطہ کے محدد عہ اور بہ فرض کرو۔ اگر لا_1، ما_1 دائرہ پر کے کسی بھی نقطہ کے محدد مانے جائیں تو اس نقطہ پر کے مماس کی مساوات

$$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ص}^2$$ ہے

یہ خطِ مماس نقطۂ (عہ، بہ) میں سے گزریگا اگر $\text{عہ}\,\text{لا}_1 + \text{بہ}\,\text{ما}_1 = \text{ص}^2$ .... (۱)

چونکہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ دائرہ پر واقع ہے اس لیے $\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 = \text{ص}^2$ .... (۲)

پس ان دو مساواتوں سے دائرہ کے ان نقطوں کے لیے لا$_1$ اور ما$_1$ کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں جن پر کے مماس دیے ہوئے نقطہ (عہ، بہ) میں سے گزرتے ہیں۔ مساوات (۲) میں ما$_1$ کے عوض $\frac{\text{ص}^2 - \text{عہ لا}_1}{\text{بہ}}$ لکھو تو

لا$_1^2$ (عہ^2 + بہ^2) − ۲ ص^2 عہ لا$_1$ + ص^2 (ص^2 − بہ^2) = ۰ ...... (۳)

اس سے ان نقطوں کے فصلے معلوم ہو جاتے ہیں۔ چونکہ مساوات (۳) دو درجی ہے اس لیے دائرہ کے **دو** مماس نقطہ (عہ، بہ) میں سے گزرینگے۔

مساوات (۳) کی اصلیں حقیقی، منطبق یا خیالی ہونگی بہ لحاظ اس کے کہ ص^4 عہ^2 − ص^2 (ص^2 − بہ^2) (عہ^2 + بہ^2) صفر سے زاید، اس کے مساوی یا اس سے کمتر ہو۔ یعنے بہ لحاظ اس کے کہ عہ^2 + بہ^2 − ص^2 صفر سے زاید، اس کے مساوی یا اس سے کمتر ہو۔ جس کے معنے یہ ہوئے کہ نقطہ (عہ، بہ) دائرہ کے باہر رہے، اس پر رہے یا اس کے اندر رہے۔

(و) کسی نقطہ سے دائرہ پر خطوطِ مماس کھینچے جاتے ہیں، ان کے تماس کے نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات۔

جس نقطہ سے خطوطِ مماس کھینچے جاتے ہیں اس کے محدد لا$_1$، ما$_1$ فرض کرو۔ تماس کے نقطوں کے محددوں کو عہ$_1$، بہ$_1$ اور عہ$_2$، بہ$_2$ مالو اور دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 = ص^2 فرض کرو۔

خطوطِ مماس کی مساواتیں لا عہ$_1$ + ما بہ$_1$ = ص^2 اور لا عہ$_2$ + ما بہ$_2$ = ص^2 ہونگی۔

چونکہ یہ دونوں خطوط مماس نقطہ لا$_1$، ما$_1$ میں سے گزرتے ہیں اس لیے ان کی مساواتیں ان محددوں کے لیے بھی صحیح ہونگی۔

∴ لا$_1$ عہ$_1$ + ما$_1$ بہ$_1$ = ص^2 ...... (۱) اور لا$_1$ عہ$_2$ + ما$_1$ بہ$_2$ = ص^2 .... (۲)

لیکن (۱) اور (۲) مساواتیں اس شرط کو ظاہر کرتی ہیں

(عہ، بہ) اور (عہ، بہ) محددوں والے نقطے ایسے خطِ مستقیم پر واقع ہو سکتے ہیں جس کی مساوات

لا لا + ما ما = ص۲ . . . . (۳) ہے

پس مساوات (۳) ایسے خطِ مستقیم کی مساوات ہے جو نقطہ لا، ما سے دائرہ پر کھینچے ہوئے خطوطِ مماس کے تماس کے دونوں نقطوں میں سے گزرتا ہے۔

اگر دائرہ کی مساوات لا۲ + ما۲ + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ لی جائے تو مصرعۂ بالا طریقہ پر بتایا جا سکتا ہے کہ لا، ما نقطہ سے کھینچے ہوئے خطوطِ مماس کے تماس کے نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات

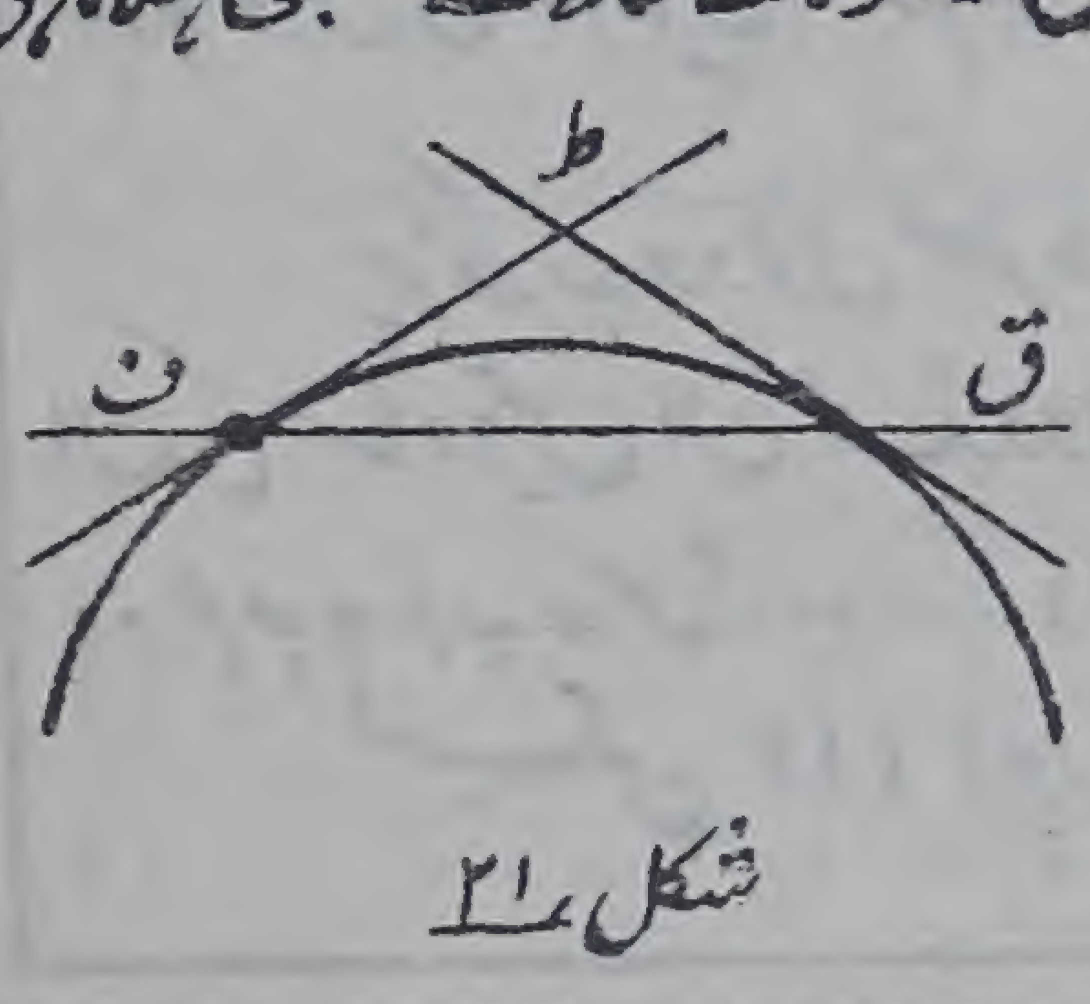
لا لا + ما ما + گ (لا + لا) + ف (ما + ما) + ج = ۰

جب نقطہ لا، ما دائرہ کے باہر ہوتا ہے تو دونوں خطوطِ مماس حقیقی ہوتے ہیں اور محدد عہ، بہ اور عہ، بہ حقیقی۔ اور جب لا، ما دائرہ کے اندر ہوتا ہے تو دونوں خطوطِ مماس خیالی ہوتے ہیں لیکن اس صورت میں بھی وہ خط جس کی تعبیر مساوات (۳) سے ہوتی ہے ایک حقیقی خط ہوتا ہے بشرطیکہ لا اور ما حقیقی ہوں۔ پس ایک حقیقی خط دائرہ کے اندر کے کسی نقطہ سے دایرہ پر کھینچے ہوئے خیالی خطوطِ مماس کے خیالی نقاطِ تماس کو ملاتا ہے۔

دائرہ کے لحاظ سے قطب اور قطبی کی تعریف

کسی نقطہ سے ایک دائرہ پر جو حقیقی یا خیالی خطوطِ مماس کھینچے جا سکتے ہیں ان کے تماس کے نقطوں میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم اس نقطہ کا اس دائرہ کے لحاظ سے قطبی کہلاتا ہے۔

کسی خطِ مستقیم اور ایک دائرہ کے حقیقی یا خیالی نقاطِ تقاطع پر کے خطوطِ مماس کے تقاطع کا نقطہ اس خطِ مستقیم کا اس دائرہ کے لحاظ سے قطب کہلاتا ہے۔



شکل ۲۱

شکل ۲۱ میں نقطہ ط دیے ہوئے دائرہ کے لحاظ سے خط ف ق

کا قطب ہے۔ اور خط ف ق دائرہ کے لحاظ سے نقطہ ط کا قطبی ہے۔
جب نقطہ ق دائرہ پر حرکت کرتا ہوا ف کی طرف کو جاتا اور بالآخر اس سے منطبق ہوتا ہے تو واضح ہے کہ خطوط مماس ط ف اور ط ق بھی بالآخر ایک دوسرے کے ساتھ اور وتر ف ق سے منطبق ہو جاتے ہیں۔ اس کے یہ معنی ہوئے کہ جب نقطہ ط دائرہ پر واقع ہوتا ہے تو ط کا قطبی ط پر کے خط مماس کے ساتھ منطبق ہوتا ہے۔
قطبی کی مساوات چونکہ خط مماس کی مساوات کی ہمشکل ہے اس لیے تحلیلی نقطۂ نظر سے بھی یہ نتیجہ مترتب ہوتا ہے کہ دائرہ پر کے نقطہ کا قطبی اس نقطہ پر کا خط مماس ہے۔

(ز) اگر کسی نقطہ ف کا قطبی کسی دوسرے نقطۂ ق میں سے گزرے تو ق کا قطبی ف میں سے گزریگا۔

فرض کرو ف کے محدد لا$_1$، ما$_1$ ہیں اور ق کے محدد لا$_2$، ما$_2$ اور دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 = ص^2 ہے تب ف اور ق کے قطبیوں کی مساواتیں علی الترتیب۔

لالا$_1$ + ماما$_1$ − ص^2 = ۰ ......(۱) اور لالا$_2$ + ماما$_2$ − ص^2 = ۰ ......(۲)

ہیں۔
اگر نقطہ ق نقطہ ف کے قطبی پر واقع ہو تو مساوات (۱) محددوں لا$_2$، ما$_2$ کے ساتھ بھی درست ہوگی۔ یعنے

لا$_2$لا$_1$ + ما$_2$ما$_1$ − ص^2 = ۰

نقطہ ف نقطہ ق کے قطبی پر واقع ہو تو اس صورت میں بھی یہی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ پس اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ف کا قطبی جب ق میں سے گزرتا ہے تو ق کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے۔

اگر ایک نقطہ ق کسی ثابت خطِ مستقیم پر واقع ہے اور ف اس خط کا قطب ہے۔ تب ق کا قطبی ف میں سے گزرنا چاہیے اس لیے کہ مفروضہ میں مان لیا گیا ہے کہ ف کا قطبی ق میں سے گزرتا ہے۔

اس کے بالعکس اگر کسی ثابت نقطہ ف میں سے کوئی خطِ مستقیم کھینچا جائے اور نقطہ ق اس خط کا قطب ہو تو چونکہ ف، ق کے قطبی پر واقع ہے ق ہمیشہ ایک ثابت خطِ مستقیم پر واقع ہونا چاہیے جو ف کا قطبی ہے۔

اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ س پر ملتے ہیں تو س خطِ مستقیم ف ق کا قطب ہو گا۔

چونکہ س نقطہ ف کے قطبی پر واقع ہے اس لیے س کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے۔ اسی طرح س کا قطبی ق میں سے گزرتا ہے پس واضح ہے کہ اس کا قطبی خطِ مستقیم ف ق ہونا چاہیے۔

(ح) کسی دیے ہوئے نقطہ کے دائرہ کے لحاظ سے قطبی کا ہندسی عمل۔

دائرہ کی مساوات $لا^۲ + ما^۲ = ص^۲$ مانو اور فرض کرو کہ ف کوئی سا نقطہ ہے جس کے محدد $لا_۱$، $ما_۱$ ہیں۔ اس نقطہ کے قطبی بلحاظ دائرہ کی مساوات $لا لا_۱ + ما ما_۱ - ص^۲ = ۰$ ف کو مرکزِ دائرہ سے ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات $\frac{لا}{لا_۱} - \frac{ما}{ما_۱} = ۰$ ہے۔

ان دونوں مساواتوں پر غور کرنے سے معلوم ہو گا کہ یہ باہمدیگر علی القوائم خطوط کی مساواتیں ہیں۔ پس کسی نقطہ کا قطبی بلحاظ دائرہ اس نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔

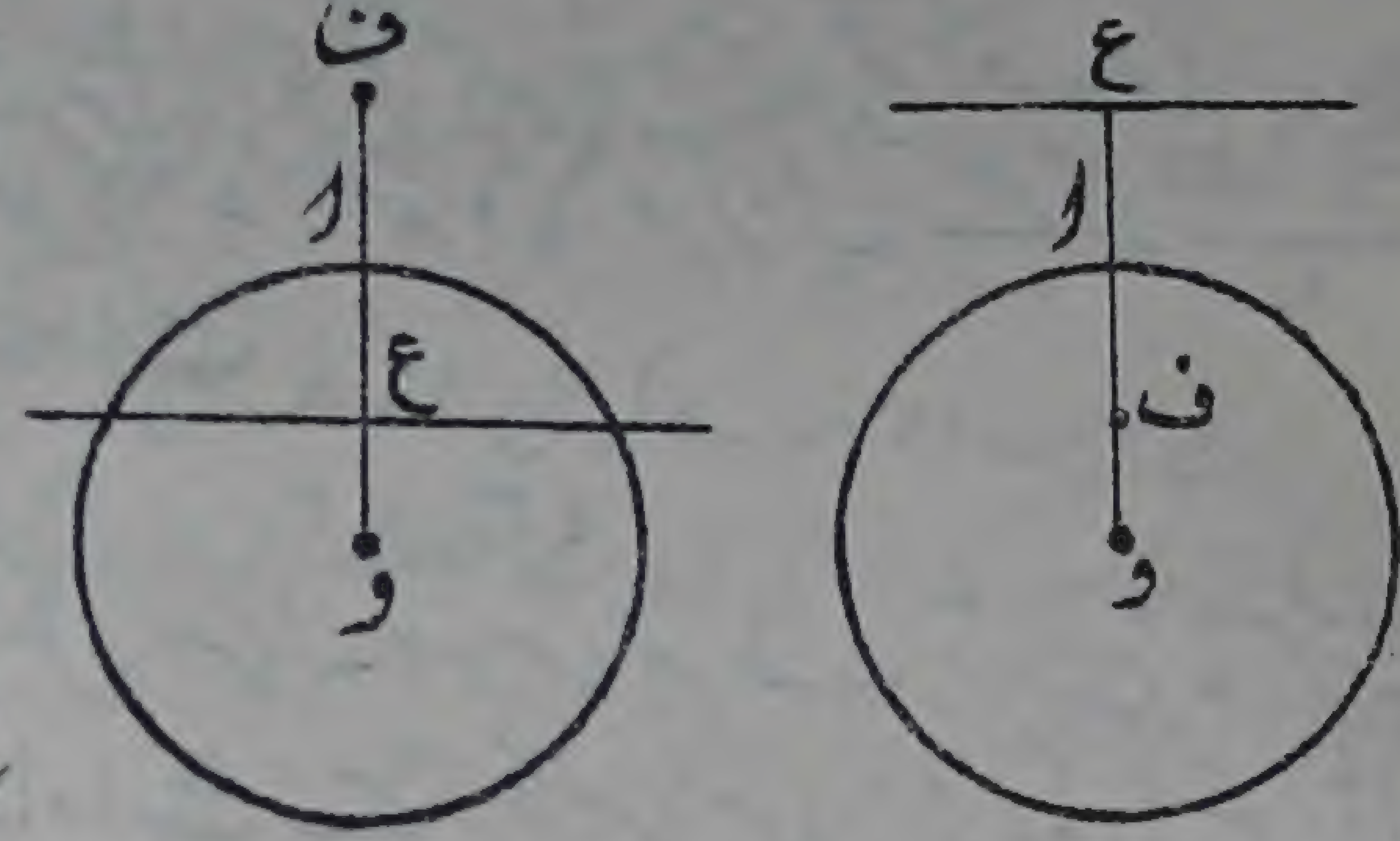
شکل ۲۲ میں اگر و ع نقطہ و سے اس کے قطبی پر عمود ہے

$$تو\ و ع = \frac{ص^۲}{\sqrt{لا_۱^۲ + ما_۱^۲}}$$

اور $وف = \sqrt{\text{مال}^2 + \text{ما}_1^2}$

∴ $وع \times وف = ص^2$

پس ف کا قطبی بلحاظ دائرہ کھینچنے کے لیے، وف کو ملاؤ اور اس کو دائرہ کو نقطہ ا پر قطع کرنے دو۔ پھر خط وف پر ایک ایسا نقطہ ع لو کہ

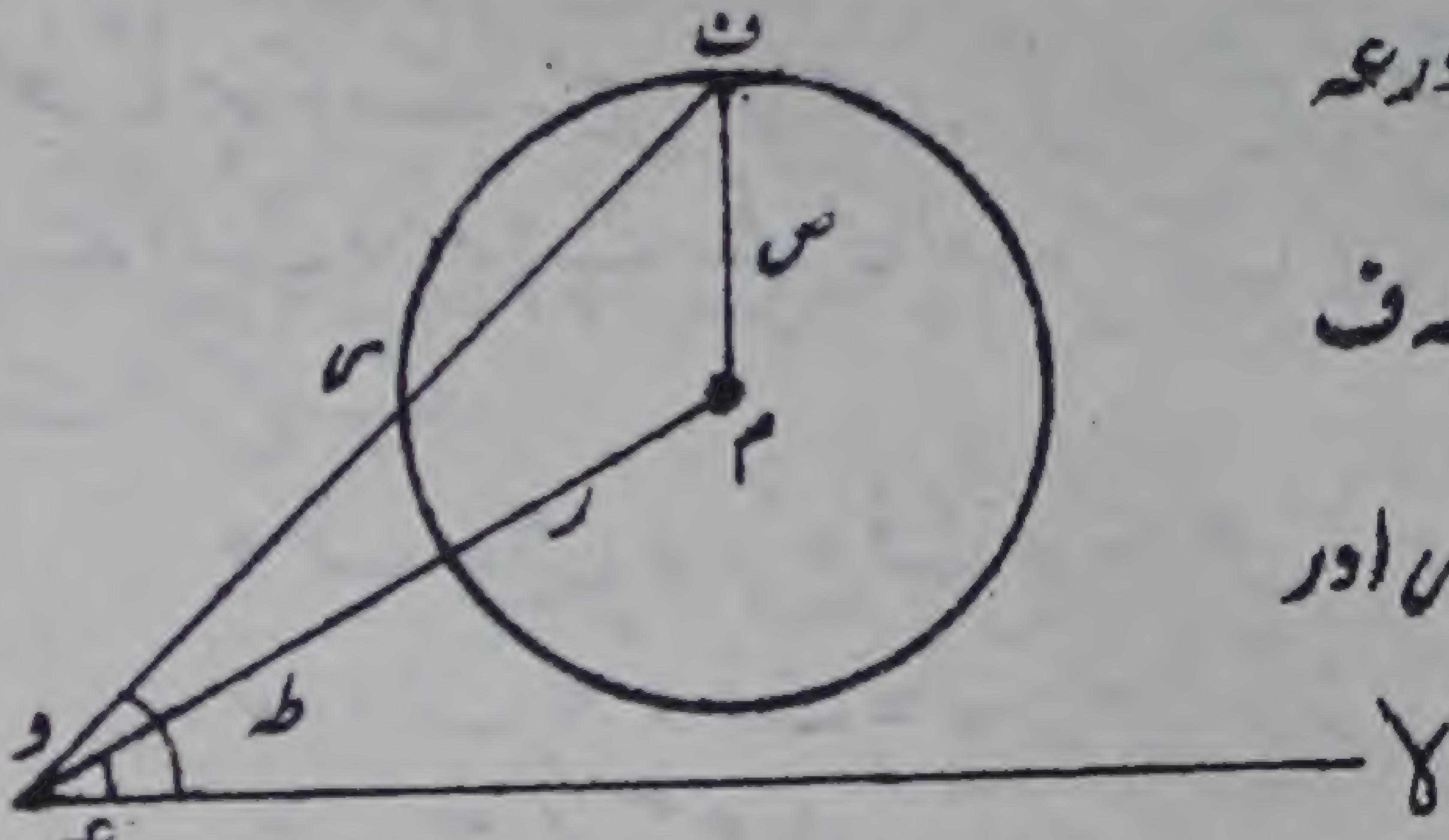


شکل ۲۲

وف : وا :: وا : وع (یعنے ف کا بلحاظ دائرہ معکوس نقطہ دریافت کرو)۔ ع میں سے وف کے علی القوائم خطِ مستقیم کھینچو۔ یہ خط نقطہ ف کا قطبی ہوگا۔

(ط) دائرہ کی قطبی مساوات۔ فرض کرو م دائرہ کا مرکز ہے۔

م کے قطبی محدّدوں کو ر اور عہ مان لو۔ دائرہ پر کوئی سا نقطہ ف لے کر اس کے قطبی محدّدوں کو س اور طہ فرض کرو۔



شکل ۲۳

تب ازروئے ہندسہ

$م ف^2 = وم^2 + وف^2 - ۲ وم \times وف$ جم م و ف

چونکہ م ف = ص، وم = ر، وف = س، زاویہ ل و م = عہ اور زاویہ ل و ف = طہ

لہذا $ص^2 = ر^2 + س^2 - ۲ ر س$ جم (طہ − عہ) ..... (۱)

یہی دائرہ کی قطبی مساوات ہے۔

اگر مبداء دائرہ کے محیط پر ہو تو س = ۲ص جم (طہ - عہ) .... (۲)

اگر علاوہ بریں حوالہ کا خطِ مستقیم و لا مرکز میں سے گزرتا ہے تو عہ = صفر اور دائرہ کی مساوات

س = ۲ص جم طہ .... (۳)

مساوات (۱) کو بشکل س^۲ - ۲ ر س جم طہ + ر^۲ - ص^۲ = ۰ بترتیب دو

یہ س کی دو درجی مساوات ہے۔ اگر س۱، س۲ اس کی اصلیں قرار دی جائیں تو

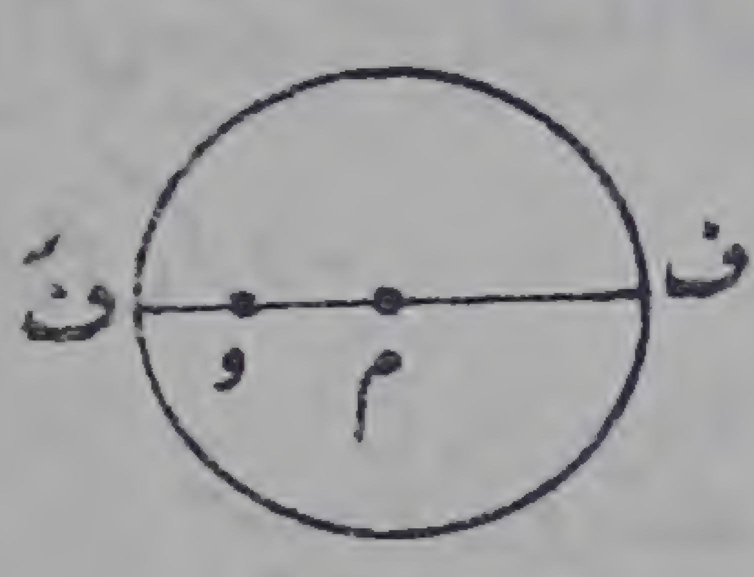
س۱ س۲ = ر^۲ - ص^۲ ..... (۴)

پس حاصل ضرب س۱ س۲ زاویہ طہ کے غیر تابع ہے جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی ثابت نقطہ سے ایک خطِ مستقیم کھینچا جائے جو کسی دیے ہوئے دائرہ کو قطع کرتا ہے تو اس خط کے قطعات کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

اگر مبداء و دائرہ کے اندر واقع ہو تو ر نصف قطر ص سے چھوٹا ہوتا ہے۔ پس س۱، س۲ کی علامتیں مختلف ہونی چاہییں یعنے مبداء سے ایک دوسرے کے مخالف سمتوں میں کھینچی گئی ہونگی جیسا کہ شکل ۲۴ سے واضح ہے۔

وف = ص + ر، وف' = -(ص - ر)

∴ وف × وف' = -(ص^۲ - ر^۲)



شکل ۲۴

(ی) قائم متقاطع دائرے۔

لا^۲ + ما^۲ + ۲گ۱ لا + ۲ف۱ ما + ج۱ = ۰

اور لا^۲ + ما^۲ + ۲گ۲ لا + ۲ف۲ ما + ج۲ = ۰

دو دائروں کے باہمدیگر علی القوائم متقاطع ہونیکی شرط کی تعیین

ان دائروں کے مرکز علی الترتیب $(-گ_{۱}، -ف_{۱})$ اور $(-گ_{۲}، -ف_{۲})$ نقطے ہیں۔ اور ان کے نصف قطروں کے مربع $گ_{۱}^{۲} + ف_{۱}^{۲} - ج_{۱}$ اور $گ_{۲}^{۲} + ف_{۲}^{۲} - ج_{۲}$ ہیں۔

یہ ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کریں گے اگر ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کا مربع ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے حاصل جمع کے مساوی ہو گا۔

پس شرط مذکور یہ ہے کہ $(گ_{۱} - گ_{۲})^{۲} + (ف_{۱} - ف_{۲})^{۲} =$
$گ_{۱}^{۲} + ف_{۱}^{۲} - ج_{۱} + گ_{۲}^{۲} + ف_{۲}^{۲} - ج_{۲}$

یعنے $۲گ_{۱}گ_{۲} + ۲ف_{۱}ف_{۲} - ج_{۱} - ج_{۲} = ۰$

[طریق دیگر۔ چونکہ کسی مشترک نقطہ $(لا_{۱}، ما_{۱})$ پر کے خطوطِ مماس حسب ذیل ہیں:-

$$لالا_{۱} + ماما_{۱} + گ_{۱}(لا + لا_{۱}) + ف_{۱}(ما + ما_{۱}) + ج_{۱} = ۰$$

$$لالا_{۱} + ماما_{۱} + گ_{۲}(لا + لا_{۱}) + ف_{۲}(ما + ما_{۱}) + ج_{۲} = ۰$$

یہ ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اگر $(لا_{۱} + گ_{۱})(لا_{۱} + گ_{۲}) + (ما_{۱} + ف_{۱})(ما_{۱} + ف_{۲}) = ۰$

یعنے $لا_{۱}^{۲} + ما_{۱}^{۲} + لا_{۱}(گ_{۱} + گ_{۲}) + ما_{۱}(ف_{۱} + ف_{۲}) + گ_{۱}گ_{۲} + ف_{۱}ف_{۲} = ۰$ .... (۱)

لیکن چونکہ $(لا_{۱}، ما_{۱})$ دونوں دائروں پر ہے اس لیے

$لا_{۱}^{۲} + ما_{۱}^{۲} + ۲گ_{۱}لا_{۱} + ۲ف_{۱}ما_{۱} + ج_{۱} = ۰$ .... (۲)

اور $لا_{۱}^{۲} + ما_{۱}^{۲} + ۲گ_{۲}لا_{۱} + ۲ف_{۲}ما_{۱} + ج_{۲} = ۰$ .... (۳)

مساوات (۱) کو ۲ سے ضرب دے کر اس میں سے (۲) اور (۳) مساواتوں کے حاصل جمع کو خارج کرو، تب

$$۲گ_{۱}گ_{۲} + ۲ف_{۱}ف_{۲} - ج_{۱} - ج_{۲} = ۰ \;]$$

(گ) کسی دیے ہوئے نقطہ سے ایک دائرہ پر کھینچے ہوئے خطِ مماس کے طول کی تعیین۔

اگر دیا ہوا نقطہ ط ہے اور اس سے م مرکز والے دائرہ پر کھینچے ہوئے دو خطوطِ مماس میں سے ط ف ایک خطِ مماس ہے تو ہندسہ کی رُو سے ظاہر ہے کہ زاویۂ م ف ط ایک زاویۂ قائمہ ہے۔ پس

ط ف^2 = م ط^2 − م ف^2 . . . . (۱)

دائرہ کی مساوات فرض کرو (لا − عہ)^2 + (ما − بہ)^2 − ص^2 = ۰ . . . . (۲) ہے

اگر ط کے محدد لا$_1$، ما$_1$ ہیں تو م ط^2 = (لا$_1$ − عہ)^2 + (ما$_1$ − بہ)^2

پس مساوات (۱) سے　　ط ف^2 = (لا$_1$ − عہ)^2 + (ما$_1$ − بہ)^2 − ص^2 . . . (۳)

یعنے (لا$_1$، ما$_1$) سے کھینچے ہوئے مماس کا طول، مساوات (۲) میں لا، ما کے عوض لا$_1$، ما$_1$ لکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

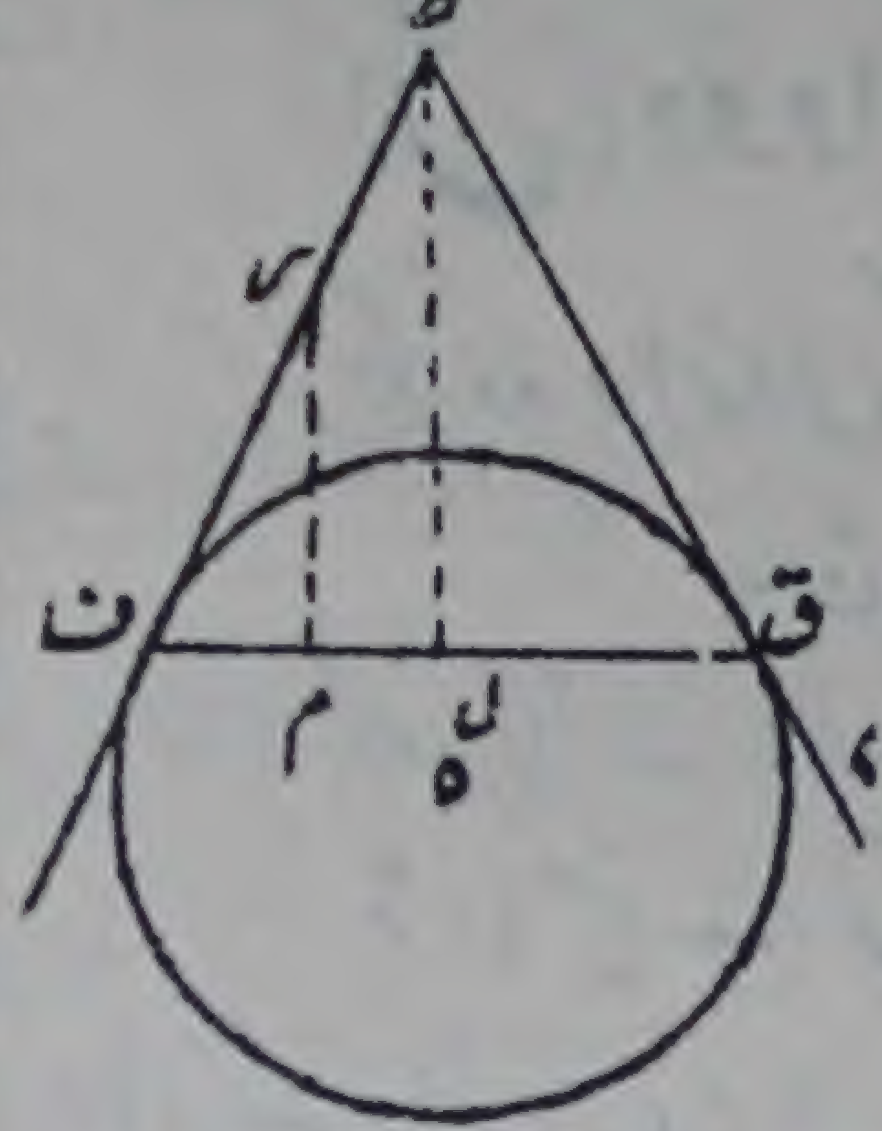
پس اگر دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ فرض کی جائے اور اس میں کسی دیے ہوئے نقطہ کے محدد درج کیے جائیں تو مساوات کی سیدھی طرف کا جملہ، اس نقطہ سے دائرہ پر کھینچے ہوئے خطِ مماس کے طول کے مربع کے مساوی ہوگا۔ اور چونکہ یہ مربع اس نقطہ سے دائرہ کو قطع کرنے والے خطوط کے قطعات کے حاصل ضرب کے مساوی ہے اس لیے جملہ مذکورہ سے اس حاصل ضرب کی قیمت بھی معلوم ہو جائیگی۔ جب نقطہ دائرہ کے اندر ہوگا تو واضح ہے کہ یہ حاصل ضرب اور مماس کا طول خیالی ہونگے۔

اگر دائرہ کی مساوات ل لا^2 + ل ما^2 + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ہو تو اس کو ل پر تقسیم کرکے اس میں دیے ہوئے نقطہ کے محدد درج کرنے سے اس نقطہ سے کھینچے ہوئے خطِ مماس کے طول کا مربع حاصل ہوگا۔

مثال۔ دائرہ لا^2 + ما^2 = ص^2 پر کسی بھی نقطہ سے کھینچے ہوئے

مماسوں کے جفت کی مساوات۔

فرض کرو نقطہ لا، ما، سے دائرہ کے دو مماس، ط ف اور ط ق کھینچے گئے ہیں۔ ان مماسوں میں سے کسی ایک مماس (بالفرض ط ف) پر س ایک نقطہ لو اور خط ف ق پر عمود ط ل اور عمود س م گراؤ۔



شکل ۲۵

مشابہ مثلثوں کی رُو سے

$\text{ط ف}^2 : \text{س ف}^2 = \text{ط ل}^2 : \text{س م}^2 \quad \ldots\ldots(1)$

ط کے قطبی ف ق کی مساوات

$\text{لا}\,\text{لا}_1 + \text{ما}\,\text{ما}_1 = \text{ص}^2$ ہے۔

پس اگر س کے محدد لا₂، ما₂ مانے جائیں تو

$$\frac{\text{ط ل}^2}{\text{س م}^2} = \left\{ \frac{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2}{\sqrt{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2}} \times \frac{\sqrt{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2}}{\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{ما}_1\text{ما}_2 - \text{ص}^2} \right\}^2$$

یعنی
$$\frac{\text{ط ل}^2}{\text{س م}^2} = \left(\frac{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2}{\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{ما}_1\text{ما}_2 - \text{ص}^2} \right)^2$$

اور چونکہ ط ف اور س ف علی الترتیب نقطہ (لا₁، ما₁) اور نقطہ (لا₂، ما₂) سے دائرہ پر کھینچے ہوئے مماس ہیں اس لیے ان کے طول بالترتیب $\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2$ اور $\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 - \text{ص}^2$ ہیں۔ پس

$$\frac{\text{ط ف}^2}{\text{س ف}^2} = \frac{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2}{\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 - \text{ص}^2}$$ لہٰذا مساوات (۱) کی رو سے

$$\left(\frac{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2}{\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{ما}_1\text{ما}_2 - \text{ص}^2} \right)^2 = \frac{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2}{\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 - \text{ص}^2}$$

یعنی $(\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{ص}^2)(\text{لا}_2^2 + \text{ما}_2^2 - \text{ص}^2) - (\text{لا}_1\text{لا}_2 + \text{ما}_1\text{ما}_2 - \text{ص}^2)^2 = 0$

پس کوئی سا نقطہ جو دیے ہوئے یعنی (لا، ما) محددوں والے نقطہ سے

دائرہ پر کھینچے ہوئے دو مماسوں میں سے کسی ایک مماس پر واقع ہوگا اس کی مساوات $(\text{لا}^2+\text{ما}^2-\text{ص}^2)(\text{لا}_1^2+\text{ما}_1^2-\text{ص}^2)-(\text{لالا}_1+\text{ماما}_1-\text{ص}^2)^2=0$ ہے
لہٰذا $\text{لا}_1\ \text{ما}_1$ سے دائرہ پر کھینچے ہوئے دو مماسوں کی مساوات یہی ہے۔

(ل) دو دائروں کا بنیادی محور۔

اگر دو دائروں کی مساواتیں علی الترتیب $\text{لا}^2+\text{ما}^2+2\text{گ}_1\text{لا}+2\text{ف}_1\text{ما}+\text{ج}_1=0 \quad \dots\dots\dots (1)$

اور $\text{لا}^2+\text{ما}^2+2\text{گ}_2\text{لا}+2\text{ف}_2\text{ما}+\text{ج}_2=0 \quad \dots\dots (2)$ ہیں۔

تو واضح ہے کہ کسی ایسے نقطہ کے محدد جو مساوات (۱) اور نیز مساوات (۲) کے دائروں پر واقع ہو مساوات $\text{لا}^2+\text{ما}^2+2\text{گ}_1\text{لا}+2\text{ف}_1\text{ما}+\text{ج}_1 = \text{لا}^2+\text{ما}^2+2\text{گ}_2\text{لا}+2\text{ف}_2\text{ما}+\text{ج}_2 \quad \dots\dots (3)$ کی تصدیق کرینگے۔

پس مساوات (۳) ایک ایسے طریق کو تعبیر کرتی ہے جو دیے ہوئے دو دائروں کے مشترک نقطوں میں سے گزرتا ہے۔ یہ مساوات

$$2(\text{گ}_1-\text{گ}_2)\text{لا}+2(\text{ف}_1-\text{ف}_2)\text{ما}+\text{ج}_1-\text{ج}_2=0 \quad \dots\dots (4)$$

میں تحویل ہوتی ہے، جو پہلے درجہ کی ہونے کی وجہ سے ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

یہ دو دائرے اگر حقیقی نقطوں میں ایک دوسرے کو قطع نہ کریں تو بھی مساوات مندرجۂ بالا سے جس خطِ مستقیم کی تعبیر ہوتی ہے وہ ہر صورت میں حقیقی ہے بشرطیکہ گ_1، ف_1، ج_1 اور گ_2، ف_2، ج_2 حقیقی ہوں۔

مساوات (۳) کی ایک اور بھی تعبیر ہو سکتی ہے۔

کسی دائرہ مساوات (۱) میں جس میں لا^2 کا سر اکائی ہے اگر لا، ما کی جگہ کسی ایک نقطہ کے محدد درج کیے جائیں تو اس کی سیدھی جانب کا جملہ اُس مماس کے مربع کے مساوی ہے جو اس نقطہ سے دائرہ تک کھینچے جاتے ہیں۔ پس اگر لا، ما خط مساوات (۳) پر کے کسی بھی نقطہ کے محدد ہوں تو اس مساوات کی سیدھی جانب کا جملہ اُس نقطہ سے دائرہ (۱) تک

کھینچے ہوئے خطِ مماس کے مربع کے مساوی ہوگا اور اس مساوات کی بائیں جانب کا جملہ اُس نقطہ سے دائرہ (۲) تک کھینچے ہوئے خطِ مماس کے مربع کے مساوی ہوگا۔

پس خط مساوات (۳) کے کسی نقطہ سے دیے ہوئے دو دائروں تک کھینچے ہوئے مماس باہمدیگر مساوی ہیں۔

تعریف۔ ایسے خط کو جو دو دائروں کے حقیقی یا خیالی نقاطِ تقاطع میں سے گزرتا ہے ان دائروں کا بنیادی محور کہتے ہیں۔

بنیادی محور کی اس طرح بھی تعریف ہوسکتی ہے کہ وہ ان نقطوں کا طریق ہے جن سے دیے ہوئے دو دائروں تک کھینچے ہوئے مماسوں کا طول مساوی ہے۔

چونکہ مساوات (۱) اور (۲) کے دائروں کے مرکزوں کے محدّد علی الترتیب $(-\text{گ}_1, -\text{ف}_1)$ اور $(-\text{گ}_2, -\text{ف}_2)$ ہیں

ان کو ملانے والے خط کی مساوات $\frac{\text{لا}+\text{گ}_1}{\text{گ}_1-\text{گ}_2} = \frac{\text{ما}+\text{ف}_1}{\text{ف}_1-\text{ف}_2}$ ہے جو بنیادی محور (مساوات ۴) کے علی القوائم ہے۔

(۴) تین دائروں کے تینوں بنیادی محور جو دائروں کے ایک ایک جفت کے لحاظ سے کھینچے گئے ہوں ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

اگر $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_1\text{لا} + 2\text{ف}_1\text{ما} + \text{ج}_1 = 0$

$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_2\text{لا} + 2\text{ف}_2\text{ما} + \text{ج}_2 = 0$

اور $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_3\text{لا} + 2\text{ف}_3\text{ما} + \text{ج}_3 = 0$

تین دائروں کی مساواتیں ہیں تو پہلے اور دوسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_1\text{لا} + 2\text{ف}_1\text{ما} + \text{ج}_1 - (\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_2\text{لا} + 2\text{ف}_2\text{ما} + \text{ج}_2) = 0$ ہے۔

اسی طرح پہلے اور تیسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ$_{۱}$ لا + ۲ف$_{۱}$ ما + ج$_{۱}$ - (لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ$_{۳}$ لا + ۲ف$_{۳}$ ما + ج$_{۳}$) = ۰ ہے

اور تیسرے اور پہلے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ$_{۳}$ لا + ۲ف$_{۳}$ ما + ج$_{۳}$ - (لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ$_{۱}$ لا + ۲ف$_{۱}$ ما + ج$_{۱}$) = ۰ ہے

ان سے واضح ہے کہ کسی نقطہ کے محدّد اگر ان تین مساواتوں میں سے کسی دو کے لیے صحیح ہونگے تو وہ باقی ماندہ تیسری مساوات کے لیے بھی صحیح ہونگے۔

ان تین بنیادی محوروں کے تقاطع کے نقطہ کو ان تین دائروں کا بنیادی مرکز کہتے ہیں۔

(ن)، دائروں کے کسی نظام کی مساوات۔

اگر مساوات لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ میں ایک یا اس سے زیادہ سروں کے اندر کوئی اختیاری مستقل شامل ہو تو وہ مساوات دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کریگی۔ مثلاً لا^{۲} + ما^{۲} - ص^{۲} = ۰ میں اگر ص ایک اختیاری مستقل ہے تو مساوات مذکور ہم مرکز دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتی ہے جن کے مرکز مبداء پر واقع ہیں۔

اگر دو دائروں کی مساواتیں علی الترتیب لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ$_{۱}$ لا + ۲ف ما + ج$_{۱}$ = ۰ ....(۱)

اور لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ$_{۲}$ لا + ۲ف$_{۲}$ ما + ج$_{۲}$ = ۰ .....(۲) ہوں تو مساوات لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ$_{۱}$ لا + ۲ف$_{۱}$ ما + ج$_{۱}$ + مر (لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ$_{۲}$ لا + ۲ف$_{۲}$ ما + ج$_{۲}$) = ۰ ....(۳) اور (۳) کا طریق ہمیشہ ایک دائرہ ہوتا ہے الّا

اس صورت میں کہ جب $\text{م} = -1$ جیسا کہ پہلے بیان ہو چکا ہے $\text{م} = -1$ کی صورت میں مساوات مذکور ایک خطِ مستقیم یعنے دیے ہوئے دائروں کے بنیادی محور کو تعبیر کرتی ہے۔

مساوات (۱) کو ترتیب دینے سے $(1+\text{م})\,\text{لا}^2 + (1+\text{م})\,\text{ما}^2 + 2\,\text{لا}\,(\text{گ}_1 + \text{م}\,\text{گ}_2) + 2\,\text{ما}\,(\text{ف}_1 + \text{م}\,\text{ف}_2) + (\text{ج}_1 + \text{م}\,\text{ج}_2) = 0$ اس کو $(1+\text{م})$ پر تقسیم کرنے سے

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\left(\frac{\text{گ}_1 + \text{م}\,\text{گ}_2}{1+\text{م}}\right)\text{لا} + 2\left(\frac{\text{ف}_1 + \text{م}\,\text{ف}_2}{1+\text{م}}\right)\text{ما} + \frac{\text{ج}_1 + \text{م}\,\text{ج}_2}{1+\text{م}} = 0$$

جو ایک دائرہ کی مساوات ہے۔

دائرہ مساوات (۳) کے مرکز کے محدد $-\frac{(\text{گ}_1 + \text{م}\,\text{گ}_2)}{1+\text{م}}$ اور $-\frac{(\text{ف}_1 + \text{م}\,\text{ف}_2)}{1+\text{م}}$ ہیں۔

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ جو نقطہ دائرہ (۱) اور دائرہ (۲) کے مرکزوں کو ملانے والے خط کو م : ۱ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اس کے بھی یہی محدد ہیں۔

[جب دائرے $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{گ}_1\,\text{لا} + 2\,\text{ف}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1 = 0$ اور $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{گ}_2\,\text{لا} + 2\,\text{ف}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2 = 0$ دو نقطوں ق_1، ق_2 میں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو بآسانی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ دائروں کا وہ نظام جس کو مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{گ}_1\,\text{لا} + 2\,\text{ف}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1 + \text{م}\,(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{گ}_2\,\text{لا} + 2\,\text{ف}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2) = 0$ تعبیر کرتی ہے ان تمام دائروں پر مشتمل ہے جو ق_1 اور ق_2 نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔]

ہم محور دائرے۔ اگر دو دائروں کے مرکزوں کو ملانے والا خط لا کا محور مانا جائے اور بنیادی محور ما کا محور تو مساوات (۳) بہ شکل $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ک}\,\text{لا} + \text{ج} = 0$ لکھی جا سکتی ہے جس میں ک ایک اختیاری مستقل ہے۔

محور خواہ کیسے ہی منتخب ہوں $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{گ}_1\,\text{لا} + 2\,\text{ف}_1\,\text{ما} + \text{ج}_1 = 0$ اور $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\,\text{گ}_2\,\text{لا} + 2\,\text{ف}_2\,\text{ما} + \text{ج}_2 = 0$

ان دائروں کی عام مساواتیں ہونگی۔ اگر ان کے مرکز محور لا پر واقع ہوں تو ف۲ = ۰ اور ف۱ = ۰. تب بنیادی محور کی مساوات $2(\text{گ}_1 - \text{گ}_2)\,\text{لا} + (\text{ج}_1 - \text{ج}_2) = 0$ ہو جاتی ہے۔

اگر یہ خط محور ما سے منطبق ہوتا ہے تو چونکہ اس محور کی مساوات لا = ۰ ہے لہذا ج۱ - ج۲ صفر کے مساوی ہونا چاہیے یعنے ج۱ = ج۲ پس ج۱ اور ج۲ کے عوض ج لکھنے اور ف۱ = ۰ اور ف۲ = ۰ لکھنے سے مساوات (۳) بشکل

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_1\,\text{لا} + \text{ج} + \text{مر}\,(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_2\,\text{لا} + \text{ج}) = 0$$

تبدیل ہوتی ہے

یعنے
$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \frac{2(\text{گ}_1 + \text{مر}\,\text{گ}_2)}{1 + \text{مر}}\,\text{لا} + \text{ج} = 0$$

چونکہ لا کا سر مر کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے اس لیے اس کو مَر سے تعبیر کر سکتے ہیں پس ان دائروں کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{مَر}\,\text{لا} + \text{ج} = 0$ ہو جاتی ہے۔

مَر کو مختلف قیمتیں دینے سے یہ مساوات دائروں کے مختلف جوڑوں کو بھی تعبیر کرتی ہے۔ ان تمام دائروں کے مرکز محور لا پر ہوتے ہیں۔ ان کے مرکزوں کے محدد $(-\text{مَر}, 0)$ ہیں اور ان کے نصف قطر $\text{ص}^2 = \text{مَر}^2 - \text{ج}$

یہ امر کہ آیا یہ دائرے ایک دوسرے کو قطع کرینگے، مس کرینگے یا نہیں ملینگے مَر اور ج کی قیمتوں پر موقوف ہے۔

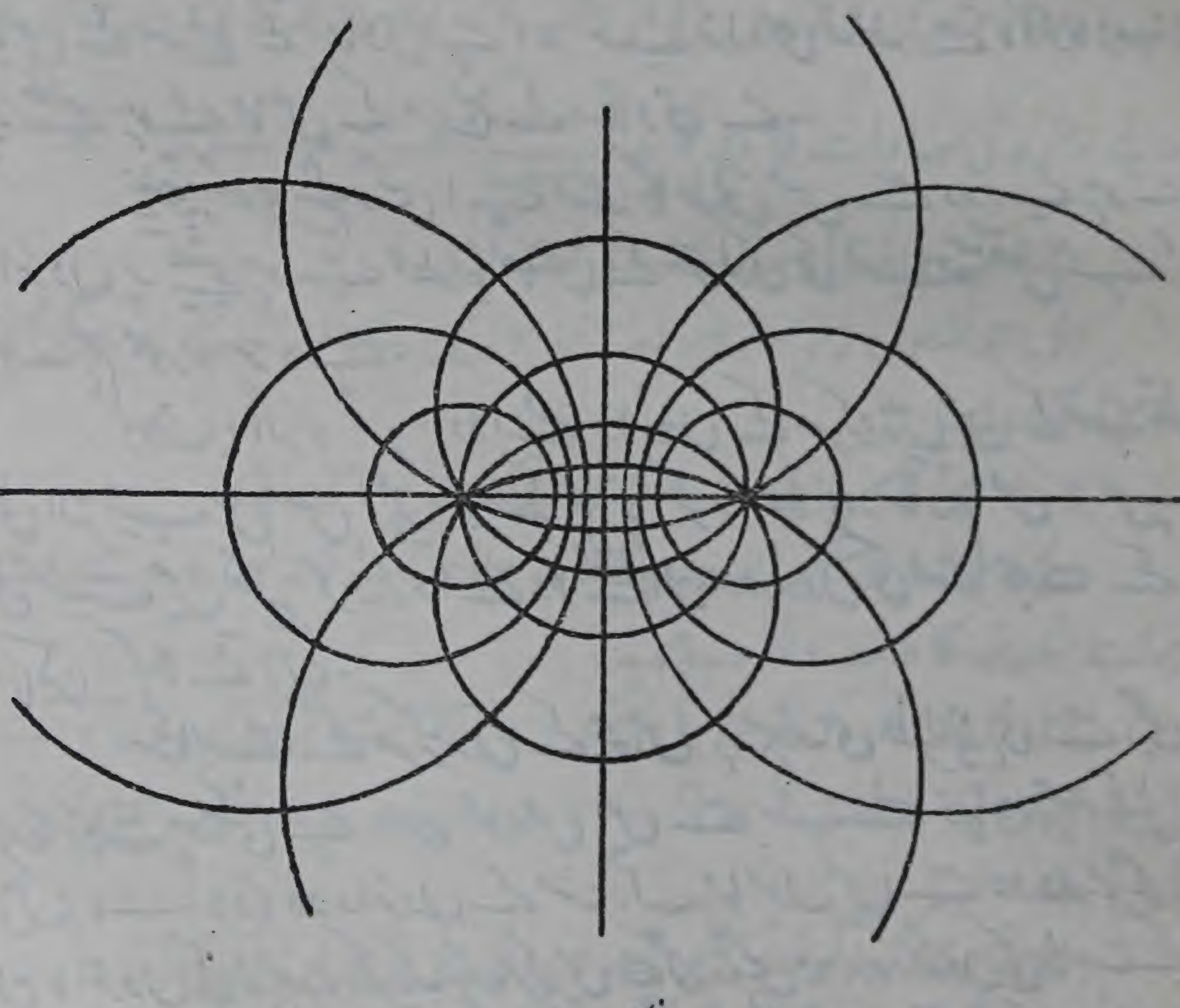
(۱) اگر $\text{مَر} = \pm\sqrt{\text{ج}}$ تب ص = ۰۔ اور یہ دائرے نقطوں $(\mp\sqrt{\text{ج}}, 0)$ میں تحویل ہونگے۔ یہ نقطے ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے کہلاتے ہیں۔

(۲) اگر ج منفی ہے تو یہ ہم محور دائرے حقیقی نقطوں $(0, +\sqrt{-\text{ج}})$ اور $(0, -\sqrt{-\text{ج}})$ میں سے گزرتے ہیں اور ان کے انتہائی نقطے خیالی ہوتے ہیں۔

(۳) اگر ج = ۰۔ تو یہ دائرے ایک دوسرے کو مبداء پر مس کرتے ہیں۔

(۴) اگر ج مثبت ہو تو یہ دائرے خود ایک دوسرے کو خیالی نقطوں میں منقطع کرتے ہیں۔ ان کے انتہائی نقطے حقیقی ہوتے ہیں اور یہ دائرے $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ج}$ مساوات والے دائرہ پر علی القوائم ہوتے ہیں۔ (اس لیے کہ دو دائرے علی القوائم ہونے کی شرط $۲\,\text{گ}_۱\,\text{گ}_۲ + ۲\,\text{ف}_۱\,\text{ف}_۲ - \text{ج}_۱ - \text{ج}_۲ = ۰$ ہے)۔

(۵) علی القوائم دائروں کی شرط کا یہ صریح نتیجہ ہے کہ دو ہم محور دائروں کے نظام جن کی مساواتیں $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۲\,\text{گ}\,\text{لا} + \text{ج} = ۰$ اور $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + ۲\,\text{ف}\,\text{ما} - \text{ج} = ۰$ ہیں۔ جن میں ج کی قیمت جملہ دائروں کے لیے مساوی ہے ایسے دائروں پر مشتمل ہیں کہ ایک نظام کا کوئی سا دائرہ دوسرے نظام کے جملہ دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ اور ایک نظام کے مشترک نقطے دوسرے نظام کے نقطئی دائرے ہیں۔



شکل ع۲۶

(ع) دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_1 \text{لا} + 2\text{ف}_1 \text{ما} + \text{ج}_1 + \text{مر}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_2 \text{لا} + 2\text{ف}_2 \text{ما} + \text{ج}_2) = 0$ کے کسی نقطے سے دائروں $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_1 \text{لا} + 2\text{ف}_1 \text{ما} + \text{ج}_1 = 0$ ...... (ا)

اور $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + 2\text{گ}_2 \text{لا} + 2\text{ف}_2 \text{ما} + \text{ج}_2 = 0$ ... (ب) پر کھینچے ہوئے مماسوں کے مربعوں کی نسبت مستقل اور $-\text{مر}$ کے مساوی ہے۔

اول الذکر دائرہ پر کوئی سا نقطہ $(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ فرض کرو۔ تب

$$\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + 2\text{گ}_1 \text{لا}_1 + 2\text{ف}_1 \text{ما}_1 + \text{ج}_1 + \text{مر}(\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + 2\text{گ}_2 \text{لا}_1 + 2\text{ف}_2 \text{ما}_1 + \text{ج}_2) = 0$$

پس $$-\text{مر} = \frac{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + 2\text{گ}_1 \text{لا}_1 + 2\text{ف}_1 \text{ما}_1 + \text{ج}_1}{\text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 + 2\text{گ}_2 \text{لا}_1 + 2\text{ف}_2 \text{ما}_1 + \text{ج}_2}$$

اس کسر میں شمار کنندہ نقطہ $\text{لا}_1، \text{ما}_1$ سے دائرہ (ا) پر کھینچے ہوئے مماس کے مربع کے مساوی ہے اور نسب نما اسی نقطہ سے دائرہ (ب) پر کھینچے ہوئے مماس کے مربع کے مساوی ہے۔

نتیجہ صحیح۔ کسی ایسے نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائروں پر کھینچے ہوئے خطوطِ مماس کے طولوں کی نسبت مستقل ہے، ایک ہم محور دائرہ ہے۔

(ف) اگر و_1، و_2 دو ایسے دائروں کے مرکز ہیں جن کے نصف قطر علی الترتیب ص_1، ص_2 ہیں تو خط $\text{و}_1 \text{و}_2$ کو داخلاً اور خارجاً $\text{ص}_1 : \text{ص}_2$ کی نسبت میں تقسیم کرنے والے دو نقطے ان دو دائروں کی مشابہت کے مراکز کہلاتے ہیں۔

مشابہت کے مرکزوں کے خواص پر ہندسی طریقہ ہی سے اچھی طرح بحث ہو سکتی ہے۔ ان خواص میں سے سب سے زیادہ اہم حسب ذیل ہیں :— (۱) دو دائروں کے مشترک مماسوں میں سے دو دو مماس ان دائروں کی مشابہت کے ایک ایک مرکز میں سے گزرتے ہیں (۲) دو دائروں کی مشابہت کے ایک مرکز میں سے جو کوئی خط ان دائروں کو قطع کرتا ہوا گزرتا ہے وہ ان سے متشابہاً قطع ہوتا ہے۔

سوالات (۷)

(۱) اگر کسی دائرہ کے سروں ا، ب کے محدد علی الترتیب لا$_1$، ما$_1$ اور لا$_2$، ما$_2$ ہوں تو دائرہ کی مساوات

$(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا} - \text{لا}_2) + (\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما} - \text{ما}_2) = 0$ ہوگی۔

[اشارہ۔ دائرہ پر کوئی سا نقطہ ف (لا، ما محدد) لو۔ ا کو ف سے ملانے والا خط محور لا کے ساتھ زاویہ $\text{مس}^{-1} \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{لا} - \text{لا}_1}$ بناتا ہے۔ اسی طرح ب کو ف سے ملانے والا خط زاویہ $\text{مس}^{-1} \frac{\text{ما} - \text{ما}_2}{\text{لا} - \text{لا}_2}$ بناتا ہے چونکہ یہ دونوں خط باہمدیگر علی القوائم ہیں لہٰذا $1 + \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{لا} - \text{لا}_1} \cdot \frac{\text{ما} - \text{ما}_2}{\text{لا} - \text{لا}_2} = 0$]

(۲) ثابت کرو کہ نقطوں (ا، ۰)، (- ا، ۰) اور (۰، ب) میں سے گزرنے والے دائرہ کی مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ب}}\,\text{ما} - \text{ا}^2 = 0$ ہے۔

(۳) ایسے دائرہ کی مساوات دریافت کرو

(ا) جو نقطوں (۴، ۲) اور (- ۶، - ۲) میں سے گزرتا ہے اور مرکز محور ما پر رکھتا ہے۔

(ب) جس کا مرکز (- ۱، - ۵) ہے اور جو محور لا پر مماس ہے۔

(ج) جو خطوطِ مستقیم لا - ۶ = ۰، لا + ۲ ما = ۰ اور لا - ۲ ما = ۸ سے بنے ہوئے مثلث کا حائط دائرہ ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ اگر م کی قیمتیں $+\sqrt{6}$ سے بڑی اور $-\sqrt{6}$ سے چھوٹی ہوں تو مساوات $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 - 4\,\text{لا} + 2\,\text{م}\,\text{ما} + 10 = 0$ ایک طریق کو تعبیر کرتی ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم $\text{ما} = \text{م}(\text{لا} - \text{ا}) + \text{ا}\sqrt{1 + \text{م}^2}$ دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 2\,\text{ا}\,\text{لا}$ کو مس کرتا ہے، م کی خواہ کچھ بھی قیمت ہو۔

(۶) نقطوں (ا، ۰) اور (-ا، ۰) میں سے بالترتیب دو خط مستقیم ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ طہ بناتے ہوئے کھینچے جاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کے تقاطع کا طریق لا² + ما² - ا² = ± ۲ ا ما مم طہ دائرے ہیں۔

(۷) ایک دائرہ ایک دیے ہوئے خط مستقیم کو مس کرتا ہے اور ایک دوسرے خط سے جو سابق الذکر خط کے علی القوائم ہے ایک مستقل طول (۲ل) منقطع کرتا ہے۔ بتاؤ کہ اس کے مرکز کے طریق کی مساوات ما² - لا² = ل² ہے۔

(۸) ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ (ا، ۰) اور (-ا، ۰) نقطوں سے اس تک کھینچے ہوئے عموددں کے طولوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔ بتاؤ کہ وہ خط ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے۔

(۹) ایک مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں لا = ا، ۲ما = ۵ اور ۳لا - ۴ما = ۵ ہیں۔ بتاؤ کہ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کی مساوات (لا-۲)² + (ما-۵ء۱)² = ۱ ہے۔

(۱۰) دائرہ لا² + ما² = ص² کے لحاظ سے نقطہ (لا، ما) کا جو قطبی ہے اگر وہ دائرہ (لا-ص)² + ما² = ص² کو مس کرے تو ثابت کرو کہ (لا، ما) ایک ایسے منحنی پر واقع ہے جس کی مساوات ما² + ۲ ا لا = ص² ہے۔

(۱۱) بتاؤ کہ مصرحۂ ذیل تین دائروں کا بنیادی مرکز (-۲، -۱) ہے:-
لا² + ما² + ۴لا + ۷ = ۰، لا² + ما² + ۵ء۱لا + ۵ء۲ما + ۵ء۴ = ۰ اور ما² + لا² + ما = ۰۔

(۱۲) اگر نقطہ (ف، گ) سے دائرہ لا² + ما² = ۴ تک کھینچے ہوئے خطِ مماس کا طول اسی نقطہ سے دائرہ لا² + ما² + ۳لا + ۳ما = ۰ تک کھینچے ہوئے خطِ مماس کے طول کا دوچند ہو تو ف² + گ² + ۴ف + ۴گ + ۲ = ۰۔

(۱۳) اس امر کے ذریعہ سے کہ کوئی سے تین دائروں کے بنیادی محور جو ان دائروں کے ایک ایک جفت کے لیے کھینچے گئے ہوں ایک نقطہ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ایک دائرہ کھینچا جاسکتا ہے جو کوئی سے دوسرے تین دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۱۴) دائروں لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ$_{۱}$ لا + ۲ف$_{۱}$ ما + ج$_{۱}$ = ۰ اور لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ$_{۲}$ لا + ۲ف$_{۲}$ ما + ج$_{۲}$ = ۰ کے نصف قطروں کا درمیانی زاویہ دریافت کرو جو ایک نقطۂ تقاطع تک کھینچے گئے ہوں۔

(۱۵) ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے محیط سے اس کے ایک قطر پر جو عمود ڈالا جاتا ہے وہ اس قطر کے قطعات کے ساتھ وسطی تناسب رکھتا ہے۔

(۱۶) ایک دائرہ لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ اور ایک خط ا لا + ب ما + جَ = ۰ دیے جاتے ہیں۔ بتاؤ کہ منحنیوں کا نظام لا^{۲} + ما^{۲} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج + م (ا لا + ب ما + جَ) = ۰ ان تمام دائروں پر مشتمل ہے جن کے مرکز دیے ہوئے دائرہ کے مرکز میں سے دیے ہوئے خط پر علی القوائم گزرنے والے خط پر واقع ہیں۔

(۱۷) سوال (۱۶) میں م جو دیا گیا ہے اس کی ہندسی ترجمانی کرو۔

(۱۸) مندرجۂ ذیل ہم محور دائروں کو مرتسم کرو۔

(ا) لا^{۲} + ما^{۲} + ۸ لا − ۹ + م (لا^{۲} + ما^{۲} − ۴ لا − ۹) = ۰

(ب) لا^{۲} + ما^{۲} + ۸ لا + م (لا^{۲} + ما^{۲} − ۴ لا) = ۰

(ج) لا^{۲} + ما^{۲} − ۱۰ لا + ۹ + م (لا^{۲} + ما^{۲} + ۸ لا + ۹) = ۰

[سب سے پہلے م = −۱ مان کر ان دائروں کا بنیادی مرکز کھینچو اور پھر م کو دوسری مناسب مثبت منفی قیمتیں دے کر دائرے تیار کرو]۔

(۱۹) ایک نقطہ اسی طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے فاصلہ کا مربع ایک ثابت خطِ مستقیم سے اس کے عمودی فاصلہ کے لحاظ سے بدلتا ہے۔ بتاؤ کہ وہ متحرک نقطہ ایک دائرہ کو مرتسم کرتا ہے۔

(۲۰) ا اور ب دو ثابت نقطے ہیں اور ف ایک تغیر النقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ف ا = ن × ف ب۔ ثابت کرو کہ ف کا طریق ایک دائرہ ہے نیز یہ بھی بتاؤ کہ ن کی مختلف قیمتیں اگر لی جائیں تو ان تمام دائروں کا بنیادی محور ایک ہی ہے۔

(۲۱) ایک ثابت نقطہ و سے کوئی سا ایک خطِ مستقیم کھینچا جاتا ہے جو

ایک ثابت دائرہ سے نقطہ ف پر ملتا ہے اور اس خط پر ق ایک ایسا نقطہ لیا جاتا ہے کہ سطح و ق × و ف = مستقل۔ بتاؤ کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۲۲) ثابت کرو کہ دیے ہوئے دو دائروں کی مساوات ہمیشہ بشکل $لا^2 + ما^2 + ۲ا لا + ب = ۰$ اور $لا^2 + ما^2 + ۲اَ لا + ب = ۰$ لکھی جاسکتی ہے اور یہ کہ ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے اندر واقع ہوگا اگر ا اَ اور ب دونوں مثبت ہیں۔

(۲۳) اگر دو دیے ہوئے دائروں کی مشابہت کے مرکزوں کو ملانے والے خط کو بطور قطر مان کر دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ اس دائرہ پر کے کسی نقطہ سے بھی ان دیے ہوئے دو دائروں پر جو خطوطِ مماس کھینچے جاتے ہیں آپس میں متناظر نصف قطروں کی نسبت رکھتے ہیں۔

(۲۴) دائروں $لا^2 + ما^2 + ۲ لا = ۰$ اور $لا^2 + ما^2 - ۶ لا = ۰$ کے مشترک خطوطِ مماس ایک متساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔

(۲۵) (ا، عہ) اور (ب، بہ) کو ملانے والے خط کو قطر مان کر جو دائرہ کھینچا جاتا ہے اس کی قطبی مساوات $ر^2 - ر\{ا\ جم\ (طہ - عہ) + ب\ جم\ (طہ - بہ)\} + ا ب\ جم\ (عہ - بہ) = ۰$ ہے۔

(۲۶) دیے ہوئے تین دائروں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرنے والے دائرہ کے مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(۲۷) ثابت کرو کہ دو ثابت دائروں کو مس کرنے والے تمام دائرے دوسرے دو ثابت دائروں میں سے ایک دائرہ پر علی القوائم ہیں۔

(۲۸) اگر دو دائروں کی مساواتیں $لا^2 + ما^2 + ۲گ_1 لا + ۲ف_1 ما + ج_1 = ۰$ اور $لا^2 + ما^2 + ۲گ_2 لا + ۲ف_2 ما + ج_2 = ۰$ ہیں تو ثابت کرو کہ مندرجہ ذیل مساوات کے دائرے

$$\frac{لا^2 + ما^2 + ۲گ_1 لا + ۲ف_1 ما + ج_1}{\sqrt{گ_1^2 + ف_1^2 + ج_1}} \mp \frac{لا^2 + ما^2 + ۲گ_2 لا + ۲ف_2 ما + ج_2}{\sqrt{گ_2^2 + ف_2^2 + ج_2}} = ۰$$

باہمدیگر علی القوائم متقاطع ہیں۔

(۲۹) ایک مثلث کے زاویئی نقطے بالترتیب (۰،۰)، (۸۴، ۲۰) اور

(۶۳، ۰) ہیں ثابت کرو کہ اس کے نونقطی دائرہ کی مساوات
لا^2 + ما^2 - ۵ر۹۷ لا - ۲۸ ما + ۱۵۱۲ = ۰ ہے۔

آٹھواں باب

خطِ مکافی کی مساواتیں

تعریفات

۵۹ (۱) تراش مخروط۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے ایک ثابت خطِ مستقیم کے فاصلہ سے مستقل نسبت رکھتا ہے۔ اس ثابت نقطہ کو ماسکہ کہتے ہیں، اس ثابت خطِ مستقیم کو مرتب اور اس مستقل نسبت کو خروج المرکز۔

یہ نسبت جب مساوات کی لینے اکائی ہوتی ہے تو طریق خطِ مکافی کہلاتا ہے، جب ایک سے چھوٹی ہوتی ہے تو خطِ ناقص اور جب ایک سے بڑی ہوتی ہے تو خطِ زائد۔

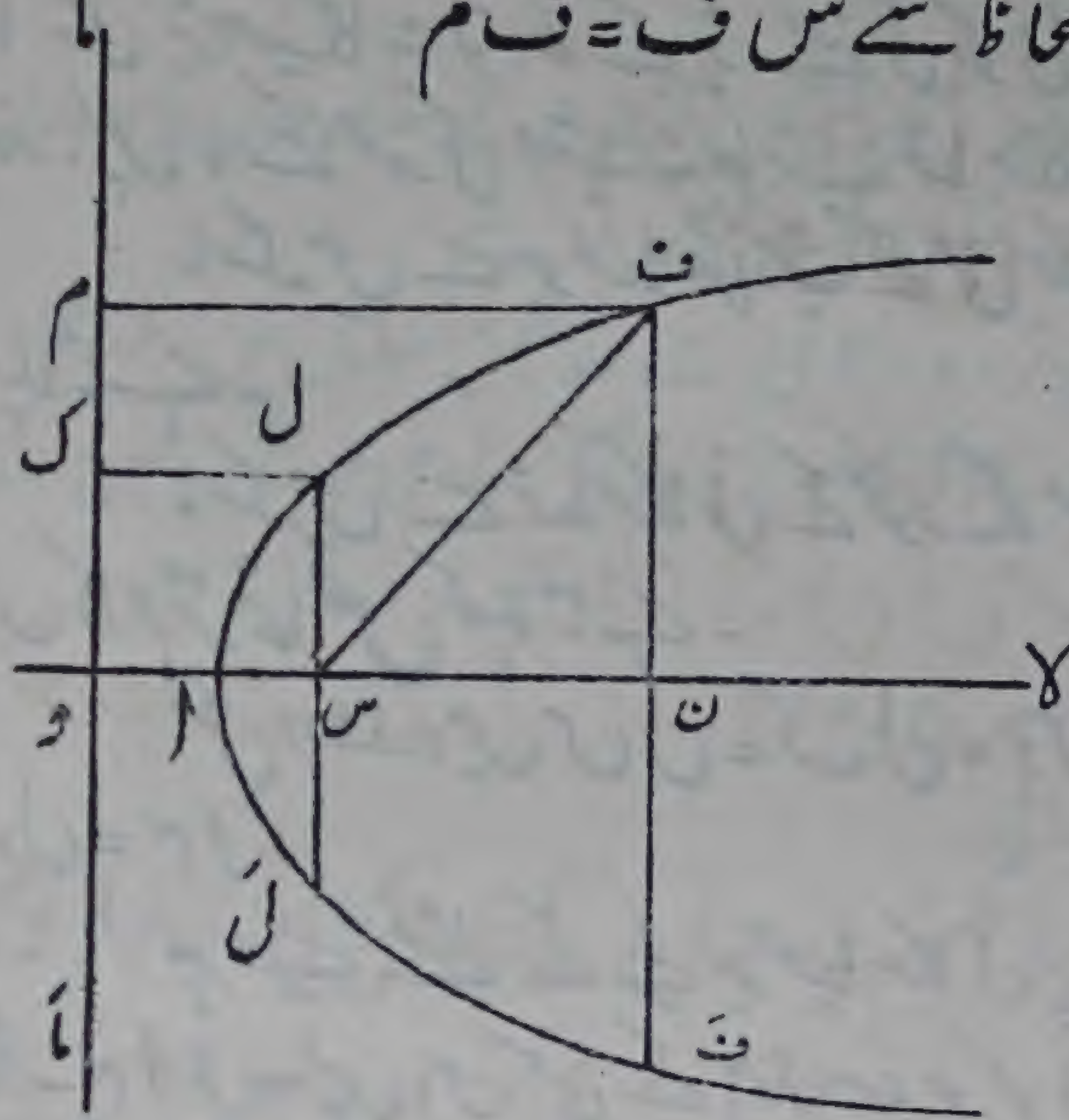
پہلے ہم خطِ مکافی کی مساوات اور اس کے ذریعہ اس کے چند اہم خواص دریافت کرینگے۔

خطِ مکافی کی مساوات۔

فرض کرو شکل (۲۷) میں س ماسکہ ہے اور ما ما' مرتب۔ س و خط ما ما' پر عمود کھینچو اور فرض کرو و س = ۲ ا۔ خط و س کو لا کا محور مانو اور و ما کو ما کا محور۔

ف کوئی سا ایک نقطہ منحنی پر لو اور اس کے محددوں کو لا و ما قرار دو۔

ف ن اور ف م محوروں پر عمود بناؤ اور س ف کو ملاؤ۔
خط مکافی کی تعریف کے لحاظ سے س ف = ف م
∴ ف م^2 = س ف^2 =
ف ن^2 + س ن^2
یعنے لا^2 = ما^2 + (لا - ۲ ل)^2
یا　ما^2 = ۴ ل (لا - ل) ....(۱)
یہی منحنی کی مساوات ہے۔
منحنی مذکور لا کے محور کو ایک نقطہ ا میں منقطع کرتا ہے جہاں ما = ۰
اور مساوات (۱) کی رو سے جب ما = ۰ تو لا = ل یعنے
و ا = ل



شکل ۲۷

نقطہ ا خطِ مکافی کا راس کہلاتا ہے۔
اگر محددوں کا محور ا پر منتقل کیا جائے لیکن محوروں کی سمتوں میں کوئی تغیر نہ ہونے دیا جائے تو
مساوات (۱)　ما^2 = ۴ ل لا ..... (۲) میں تبدیل ہو جاتی ہے۔
اس لحاظ سے ماسکہ نقطہ (ل، ۰) ہوتا ہے۔ اور خط لا + ل = ۰
معہذا س ف = م ف = و ا + ا ن = ل + لا
چونکہ ما^2 ایک مثبت مقدار ہے لا ہمیشہ مثبت ہو گا۔ اور اس لیے منحنی بالکلیہ محور ما کی مثبت جانب واقع ہو گا۔ لا کی کسی خاص قیمت کے لیے واضح ہے کہ ما کی دو قیمتیں ہو نگی جو مقدار میں باہمدیگر مساوی ہو نگی۔ ان میں سے ایک مثبت ہو گی اور دوسری منفی۔ پس منحنی کے تمام وتروں کی جو لا کے محور کے علی القوائم ہو نگے محور لا تنصیف کریگا۔
اور منحنی کے وہ حصے جو لا کے محور کی مثبت جانب ہو نگے اس کے

منفی جانب کے حصوں کے ہر لحاظ سے مساوی ہونگے۔ جیسے جیسے لا بڑھیگا ما بھی بڑھیگا نہ تو لا کے بڑھنے کی کوئی حد ہے اور نہ ما کے بڑھنے کی کوئی حد۔ پس ما کے محور کی مثبت جانب خط مکانی غیر محدود ہوتا ہے۔

ماسکہ میں سے جو خط مرتب کے علی القوائم گزرتا ہے خطِ مکانی کا **محور** کہلاتا ہے۔

ماسکہ میں سے خط مکانی کے محور کے علی القوائم جو خطِ مستقیم کھینچا جاتا ہے اس کا **وترِ خاص** کہلاتا ہے۔

شکل (۲۷) میں س ل = ک ل = و س = ۲ ا پس وتر خاص کا پورا طول = ۴ ا

ہر ایسے نقطے کے لیے جو خطِ مکانی پر واقع ہے ہم نے دیکھا ہے کہ ما^{2} − ۴ ا لا = ۰ پس اس منحنی کے اندر جو کوئی نقطہ واقع ہو اس کے لیے ما^{2} − ۴ ا لا منفی ہوگا۔ اسی طرح منحنی کے باہر جو نقطہ ہو گا اس کے لیے ما^{2} − ۴ ا لا مثبت ہوگا۔

خطِ مستقیم ما = م لا + ج اور خطِ مکانی ما^{2} = ۴ ا لا کے مشترک نقطوں کے محدد ان دونوں مساواتوں کی شرط کو پورا کرتے ہیں۔ پس ان نقطوں کے لیے

(م لا + ج)^{2} = ۴ ا لا۔ یعنے م^{2} لا^{2} + (۲ م ج − ۴ ا) لا + ج^{2} = ۰ ......(۳)

چونکہ یہ دوسرے درجہ کی مساوات ہے اس لیے ہر ایک خطِ مستقیم خطِ مساوی سے دو نقطوں پر ملتا ہے جو حقیقی، منطبق یا خیالی ہوتے ہیں۔

اگر م بہت چھوٹا ہے تو مساوات (۳) کی ایک اصل بہت بڑی ہوتی ہے۔ جب م = ۰ تو واضح ہے کہ ایک اصل نامتناہی بڑی ہو جاتی ہے۔ پس خطِ مکانی کے محور کے متوازی جو کوئی خطِ مستقیم کھینچا جاتا ہے منحنی سے ایک نقطہ پر محدود فاصلہ پر ملتا ہے اور دوسرے نقطہ پر راس سے نامتناہی بڑے فاصلہ پر ملتا ہے۔

(ب) خطِ مکانی ما^{2} = ۴ ا لا کو خطِ مستقیم ما = م لا + ج کے

مس کرنے کی شرط۔

چونکہ خطِ مکافی اور خطِ مستقیم کے مشترک نقطوں کے مقطوعوں کی مساوات

م^{۲}لا^{۲} + (۲مج − ۴ا) لا + ج^{۲} = ۰ ہے

اگر یہ خطِ مستقیم خطِ مماس ہو تو وہ مکافی سے دو منطبق نقطوں میں ملیگا۔ ایسی صورت میں مساوات مندرجۂ بالا کی اصلیں باہدیگر مساوی ہونگی۔ جس کے لیے ضروری ہے کہ

۴م^{۲}ج^{۲} = (۲مج − ۴ا)^{۲}

پس مج = ا یعنے ج = ا/م

∴ م کی قیمت کچھ ہی ہو خطِ مستقیم ما = م لا + ا/م خطِ مکافی ما^{۲} = ۴ا لا کو مس کریگا۔

(ج) مکافی کے دیے ہوئے دو نقطوں میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات اور اس کے ذریعہ مکافی کے کسی نقطہ پر کے خطِ مماس کی مساوات کی تعیین۔

مکافی کی مساوات ما^{۲} = ۴ا لا مانو اور اس پر لا$_{۱}$، ما$_{۱}$ اور لا$_{۲}$، ما$_{۲}$ کوئی سے دو نقطے لو۔

ان نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات (لا − لا$_{۱}$)/(لا$_{۱}$ − لا$_{۲}$) = (ما − ما$_{۱}$)/(ما$_{۱}$ − ما$_{۲}$) ہے
جو پھیلا لینے سے لا (ما$_{۱}$ − ما$_{۲}$) = لا$_{۱}$ (ما − ما$_{۲}$) − لا$_{۲}$ (ما − ما$_{۱}$) بن جاتی ہے۔ چونکہ لا$_{۱}$، ما$_{۱}$ اور لا$_{۲}$، ما$_{۲}$ نقطے مکافی پر واقع ہیں اس لیے لا (ما$_{۱}$ − ما$_{۲}$) = (ما$_{۱}^{۲}$/۴ا) (ما − ما$_{۲}$) − (ما$_{۲}^{۲}$/۴ا) (ما − ما$_{۱}$) یعنے ۴ا لا (ما$_{۱}$ − ما$_{۲}$) = ما (ما$_{۱}^{۲}$ − ما$_{۲}^{۲}$) − ما$_{۱}$ما$_{۲}$ (ما$_{۱}$ − ما$_{۲}$)

پس ۴ا لا = ما (ما$_{۱}$ + ما$_{۲}$) − ما$_{۱}$ما$_{۲}$ یا ما (ما$_{۱}$ + ما$_{۲}$) − ۴ا لا − ما$_{۱}$ ما$_{۲}$ = ۰ ...(۱)

اس مساوات میں ما$_{۲}$ = ما$_{۱}$ لکھنے سے نقطہ (لا$_{۱}$، ما$_{۱}$) پر کے خطِ مماس کی مساوات یعنے ۲ما ما$_{۱}$ − ۴ا لا − ما$_{۱}^{۲}$ = ۰ حاصل ہوتی ہے اور چونکہ ما$_{۱}^{۲}$ = ۴ا لا$_{۱}$

لہٰذا $\text{ما}\,\text{ما}_1 = ۲\,\text{ل}\,(\text{لا} + \text{لا}_1)$ . . . . (۲)

واضح ہے کہ مکافی کے راس ا یعنے نقطہ (۰، ۰) کے خطِ مماس کی مساوات $\text{لا} = ۰$ ہے پس یہ خطِ مماس مکافی کے محور پر علی القوائم ہے۔

مکافی کے مماس کی یہ مساوات $\text{ما} = \text{مر}\,\text{لا} + \text{ج}$ کی شکل میں لکھی جاتی ہے تو

$$\text{ما} = \frac{۲\,\text{ل}}{\text{ما}_1}\,\text{لا} + \frac{۲\,\text{ل}\,\text{لا}_1}{\text{ما}_1}$$ جس میں $\text{مر} = \frac{۲\,\text{ل}}{\text{ما}_1}$ اور $\text{ج} = \frac{۲\,\text{ل}\,\text{لا}_1}{\text{ما}_1}$

پس $\text{ج} = \frac{\text{ل}}{\text{مر}}$ جیسا کہ ذیلی فصل (ب) میں اور طریقہ سے بتایا گیا ہے۔

مثال (۱)۔ مکافی کے دو خطوطِ مماس کے نقطۂ تقاطع کا معین، ان خطوطِ مماس کے نقاط تماس کے معینوں کا حسابی اوسط ہے۔

$(\text{لا}_1، \text{ما}_1)$ اور $(\text{لا}_2، \text{ما}_2)$ نقطوں پر کے خطوطِ مماس کی مساواتیں بالترتیب $\text{ما}\,\text{ما}_1 = ۲\,\text{ل}\,(\text{لا} + \text{لا}_1)$ اور $\text{ما}\,\text{ما}_2 = ۲\,\text{ل}\,(\text{لا} + \text{لا}_2)$ ہیں۔

ایک کو دوسری میں سے تفریق کرنے سے ان مماسوں کے مشترک نقطہ کے لیے $\text{ما}\,(\text{ما}_1 - \text{ما}_2) = ۲\,\text{ل}\,(\text{لا}_1 - \text{لا}_2) = \frac{1}{2}\,(\text{ما}_1^2 - \text{ما}_2^2)$ $\therefore\ \text{ما} = \frac{1}{2}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)$ . . . (۱)

واضح ہو کہ خطوطِ مماس کی مساواتوں کو جمع کرنے سے $\text{ما}\,(\text{ما}_1 + \text{ما}_2) = ۴\,\text{ل}\,\text{لا} + ۲\,\text{ل}\,(\text{لا}_1 + \text{لا}_2)$ پس $۴\,\text{ل}\,\text{لا} = \frac{1}{2}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)^2 - \frac{1}{2}(\text{ما}_1^2 + \text{ما}_2^2) = \text{ما}_1\,\text{ما}_2$ . . . . . (۲)

مثال (۲)۔ مکافی کے دو ایسے خطوطِ مماس کے نقاطع کا طریق جو باہمدیگر علی القوائم ہوں مکافی کا مرتب ہے۔

فرض کرو کہ ان خطوطِ مماس کی مساواتیں $\text{ما} = \text{مر}\,\text{لا} + \frac{\text{ل}}{\text{مر}}$ اور $\text{ما} = \text{مر}'\,\text{لا} + \frac{\text{ل}}{\text{مر}'}$ ہیں۔

چونکہ یہ باہمدیگر علی القوائم ہیں اس لیے $\text{مر}\,\text{مر}' =$ ۔ ا پس مساوات دوم مر کی رقموں میں

$\text{ما} = -\frac{1}{\text{مر}}\,\text{لا} - \text{ل}\,\text{مر}$ لکھی جا سکتی ہے۔

اس مساوات کو پہلی مساوات میں سے تفریق کرنے سے مشترک نقطہ کے

مقطوعہ کی مساوات ۰ = لا (م + ۱/م) + ا (م + ۱/م) یعنے لا + ا = ۰ حاصل ہوتی ہے
جو مرتب کی مساوات ہے۔

(د) مکافی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات۔

مکافی کے نقطہ (لا۱، ما۱) پر کے مماس کی مساوات
ما ما۱ = ۲ ا (لا + لا۱) ہے یعنے ما ما۱ − ۲ ا لا − ۲ ا لا۱ = ۰ ہے۔
اس خط کے علی القوائم خط کی مساوات ۲ ا ما + ما۱ لا + ج = ۰ ہے جس میں ج کوئی سا مستقل ہے چونکہ ہمیں لا۱، ما۱ پر کا عماد مقصود ہے اس لیے آخر الذکر مساوات میں بجائے لا اور ما کے لا۱ اور ما۱ لکھنے سے ۲ ا ما۱ + ما۱ لا۱ + ج = ۰
جس سے ج کی قیمت − ۲ ا ما۱ − ما۱ لا۱ برآمد ہوتی ہے۔
پس ۲ ا ما + ما۱ لا − ۲ ا ما۱ − ما۱ لا۱ = ۰ یعنے مکافی کے نقطہ لا۱، ما۱ پر کے عماد کی مساوات ۲ ا (ما − ما۱) + ما۱ (لا − لا۱) = ۰ .... (۱)
چونکہ ۴ ا لا۱ = ما۱² لہذا ۸ ا² (ما − ما۱) + ما۱ (۴ ا لا − ما۱²) = ۰ ...... (۲)

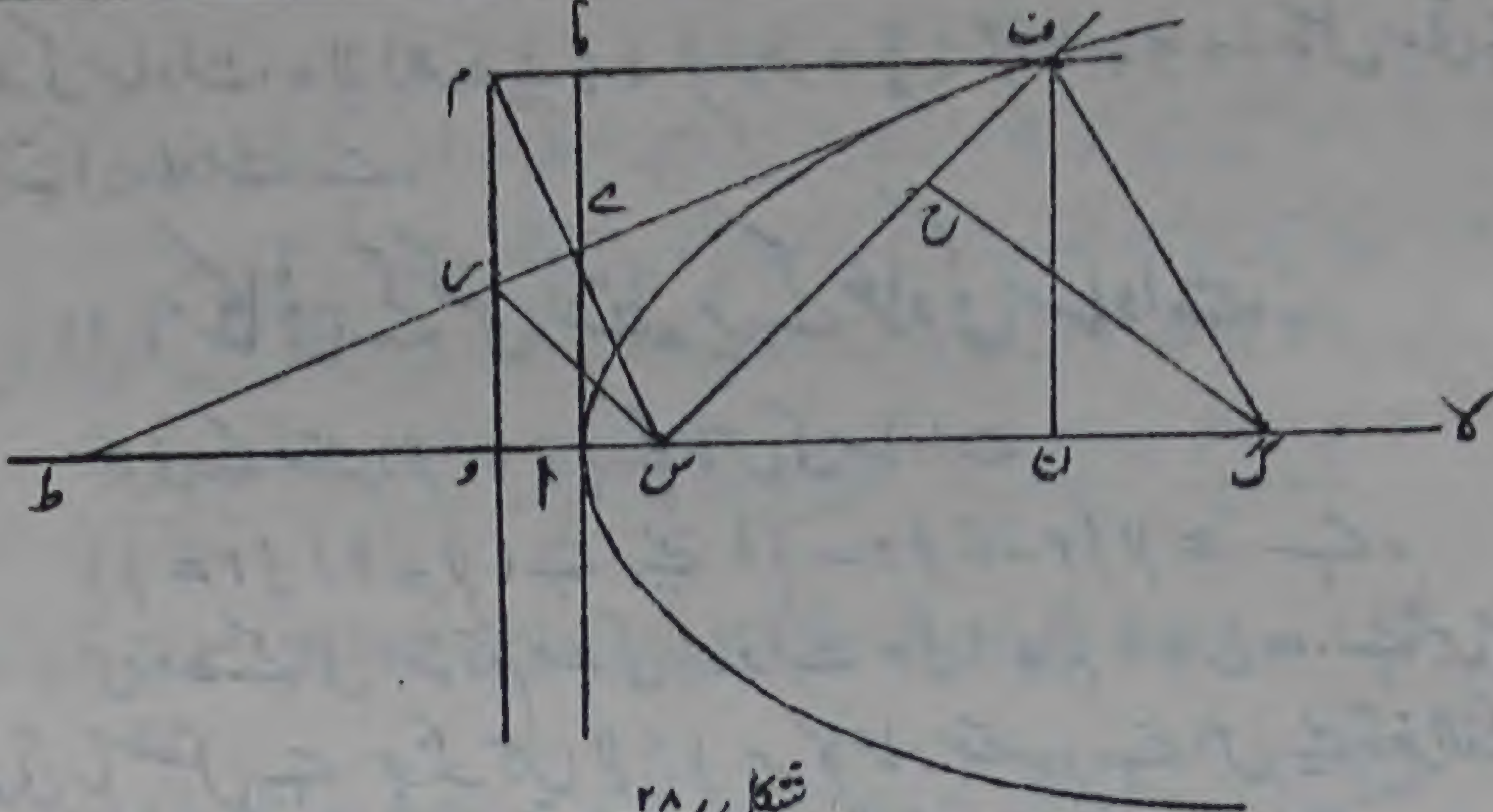
جو بشکل ما = − (ما۱ / ۲ ا) لا + ما۱ + (ما۱³ / ۸ ا²) ...... (۳) لکھی جا سکتی ہے۔

− (ما۱ / ۲ ا) کے عوض م لکھنے سے ما۱ = − ۲ ا م اور (ما۱³ / ۸ ا²) = − ا م³

پس مساوات (۳) بشکل ما = م لا − ۲ ا م − ا م³ ...... (۴) تبدیل ہو جاتی ہے جو بعض صورتوں میں زیادہ مفید پائی جاتی ہے۔

(ہ) اب ہم مکافی کی مساوات کے ذریعہ اس منحنی کے بعض اہم ہندسی خواص کو ثابت کرینگے۔

شکل ۲۸ میں مکافی ف ا کھینچا گیا ہے جس کا مرتب و م ہے۔ ف پر کا خطِ مماس ف ت ط مرتب سے نقطہ س پر ملتا ہے اور محور سے نقطہ ط پر۔ ف سے ف م، ف ن مرتب اور محور پر عمود کھینچے گئے ہیں۔ ف کے محدد لا۱، ما۱ فرض کرو اس پر کے مماس کی مساوات ما ما۱ = ۲ ا (لا + لا۱) ...(۱)



شکل ۲۸

جہاں یہ خط محور مکافی یعنے محور و لا سے ملتا ہے وہاں ما = ۰ پس اس نقطہ پر لا + لا₁ = ۰ یعنے ط ا = ا ن . . . . (عہ)

∴ ط س = ا س + ا ن = س ف . . . . (بہ)

اور چونکہ ط س = س ف زاویہ س ط ف = زاویہ س ف ط۔ پس خطِ مماس ف ط زاویہ س ف م کی تنصیف کرتا ہے۔ . . . . (جہ)

یہ بھی ظاہر ہے کہ مثلث ر س ف اور ر م ف ہر لحاظ سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

لہٰذا ∠ ر س ف = ∠ ر م ف = ایک زاویۂ قائمہ . . . . (ضہ)

چونکہ م نقطہ (−ا، ما₁) ہے اور س نقطہ (ا، ۰) خط س م کی مساوات

$$\frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{-\text{ما}_1} = \frac{\text{لا} + \text{ا}}{۲\,\text{ا}}$$ . . . . (۲) ہے

واضح ہے کہ یہ خط ف پر کے خطِ مماس کے علی القوائم ہے جس کی مساوات (۱) ہے

∴ س م خطِ مماس ف ط کے علی القوائم ہے۔ . . . . (صہ)

چونکہ ف ط خط س م کے علی القوائم اور زاویہ س ف م کی تنصیف کرتا ہے اس لیے وہ س م کی بھی تنصیف کریگا۔ اگر س م اور ف ط کے تقاطع کا

نقطہ ے قرار دیا جائے س ے = ے م
لیکن س ا = ا و اس لیے ا ے خط و م کے متوازی ہے۔ اور اس لیے مکافی کے راس پر کا خط مماس ہے۔ پس مکافی کے ماسکہ میں سے جو خط اس کے کسی خطِ مماس ف ط پر علی القوائم کھینچا جاتا ہے ف ط سے مکافی کے نقطۂ راس پر کے خط مماس سے ملتا ہے . . . . . . (۲)

اس مسئلہ کو ہم ہندسۂ تحلیلی سے بھی اس طرح ثابت کر سکتے ہیں :-
مکافی کے کسی خطِ مماس کی مساوات ما = مر لا + ا/مر . . . . . . (۳) فرض کرو
اِس خط پر ماسکہ (ا، ۰) سے گرائے ہوئے عمود کی مساوات

ما = − ا/مر (لا − ا) ہے۔

یعنی ما = − لا/مر + ا/مر . . . . (۴) ہوگی۔
ظاہر ہے کہ خطوط (۳) اور (۴) اس نقطہ پر ملتے ہیں جہاں لا = ۰
مکافی کے نقطہ ف یعنے (لا، ما) پر کے عماد کی مساوات

۲ ا (ما − ما) + ما (لا − لا) = ۰ ہے (ذیلی فصل د)

نقطہ گ پر ما = ۰ اور اس لیے −۲ ا ما + ما (لا − لا) = ۰
یعنے ۲ ا = لا − لا = اگ − ان = ن گ
∴ ن گ = ۲ ا (یعنے مستقل) . . . . (۵)

سوالات ۸ (ل)

(۱) ثابت کرو کہ مکافی ما² = ۴ ا لا کے وتر خاص کے سروں پر کے خطوطِ مماس اور ان کے عمادوں کی مساواتیں بالترتیب لا ∓ ما + ا = ۰ اور ما ± لا ∓ ۳ ا = ۰ ہیں۔

(۲) بتاؤ کہ مساوات لا² + ۴ ا لا + ۲ ا ما = ۰ ایک ایسے مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا راس نقطہ (−۲ ا، ۲ ا) پر ہے جس کا وتر خاص ۲ ا ہے اور جس کا محور ما کے محور کے متوازی ہے۔

(۳) اگر مکافی کے محور کے کسی ثابت نقطہ د میں سے کوئی سا وتر ف د فَ کھینچا جائے تو بتاؤ کہ ف اور فَ کے معینوں کا حاصل ضرب مستقل ہے اور اسی طرح ان کے مقطوعوں یا فصلوں کا حاصل ضرب بھی مستقل ہے۔

(۴) مکافی کے خطوطِ مماس ما = م لا + ل/م اور ما = مَ لا + ل/مَ کے نقطۂ تقاطع کے محدد دریافت کرو۔ ثابت کرو کہ ان کے تقاطع کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جبکہ م مَ مستقل ہے اور جب م مَ = -۱ تو یہ خطِ مستقیم مکافی کا مرتب ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ مکافی ما² = ۴ ل لا کے اندرونی مثلث کا رقبہ 1/(۸ل) (ما۱ − ما۲)(ما۲ − ما۳)(ما۳ − ما۱) ہے جس میں ما۱، ما۲، ما۳ مثلث کے زاویئے نقطوں کے معین ہیں۔

۷۹ کسی نقطہ سے مکافی کے دو خطوطِ مماس کھینچے جا سکتے ہیں جو حقیقی، منطبق یا خیالی ہونگے بہ لحاظ اس کے کہ نقطہ مکافی کے باہر، اس پر یا اس کے اندر واقع ہے۔

م کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو خط ما = م لا + ل/م .... (۱) مکافی ما² = ۴ ل لا کو مس کرتا ہے۔

یہ خط ایک مخصوص نقطہ لاَ، ماَ میں سے گزرتا ہے اگر ماَ = م لاَ + ل/م یعنے اگر م² لاَ − م ماَ + ل = ۰ .... (۲)

مساوات (۲) بہ لحاظ م ایک دو درجی مساوات ہے۔ اس سے مکافی کے ان خطوطِ مماس کی سمتیں دریافت ہوتی ہیں جو نقطہ لاَ، ماَ میں سے گزرتے ہیں۔ چونکہ دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں اس لیے کسی نقطہ لاَ، ماَ میں سے مکافی پر عموماً دو خطوطِ مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔ اگر ماَ² − ۴ ل لاَ مثبت ہے تو یہ اصلیں حقیقی ہیں، اگر صفر ہے تو منطبق اور اگر منفی ہے تو خیالی۔ یعنے نقطہ (لاَ، ماَ) اگر مکافی کے باہر ہے تو خطوطِ مماس حقیقی ہونگے، اگر نقطہ مکافی پر

ہو گا تو خطوطِ مماس منطبق ہو نگے اور اگر اندر ہو گا تو خیالی۔

۶۰ (ا)۔ کسی نقطہ سے مکافی پر دو خطوطِ مماس جو کھینچے جا سکتے ہیں ان کے نقاطِ تماس میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات۔

فرض کرو نقطہ لاَ، ماَ سے خطوطِ مماس کھینچے گئے ہیں اور خطِ مکافی کے ساتھ ان کے نقاطِ تماس بالترتیب ع۱، ب۱ اور ع۲، ب۲ ہیں۔
(ع۱، ب۱) اور (ع۲، ب۲) پر کے خطوطِ مماس کی مساواتیں
ما ب۱ = ۲ ا (لا + ع۱) اور ما ب۲ = ۲ ا (لا + ع۲) ہیں۔
چونکہ نقطہ لاَ، ماَ ان دونوں خطوطِ مستقیم پر واقع ہے۔ لہٰذا
ماَ ب۱ = ۲ ا (لاَ + ع۱) ۔۔۔۔۔ (۱) اور ماَ ب۲ = ۲ ا (لاَ + ع۲) ۔۔۔۔۔ (۲)
لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) اس شرط کو ظاہر کرتی ہیں کہ (ع۱، ب۱) اور (ع۲، ب۲) نقطے خطِ مستقیم ماماَ = ۲ ا (لاَ + لا) ۔۔۔ (۳) پر واقع ہوں۔
پس مساوات (۳) نقطہ (لاَ، ماَ) سے کھینچے ہوئے خطوطِ مماس کے نقاطِ تماس میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔
کسی نقطہ ف سے مکافی پر کھینچے ہوئے دو خطوطِ مماس کے نقاطِ تماس کو ملانے والے خطِ مستقیم کو ف کا قطبی بہ لحاظ مکافی کہتے ہیں۔

(ب) اگر مکافی کے لحاظ سے کسی نقطہ ف کا قطبی نقطہ ق میں سے گزرتا ہے تو ق کا قطبی ف میں سے گزریگا۔

ف کے محددوں کو لا۱، ما۱ اور ق کے محددوں کو لا۲، ما۲ فرض کرو۔
نقطہ ف کے قطبی بہ لحاظ مکافی ما۲ = ۴ ا لا کی مساوات
ما ما۱ = ۲ ا (لا + لا۱) ہے
اگر یہ خط نقطہ ق (یعنے لا۲، ما۲) میں سے گزرتا ہے تو ما۱ ما۲ = ۲ ا (لا۲ + لا۱)

اس مساوات کے تشاکل سے واضح ہے کہ وہ اس شرط کو بھی ظاہر کرتی ہے کہ ق کا قطبی ف میں سے گزرنا چاہیے۔

اس نتیجہ سے مستنبط ہوتا ہے (جیسا کہ دائرہ کی صورت میں بنایا گیا تھا) کہ اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ ر پر ملتے ہیں تو ر خطِ مستقیم ف، ق کا قطب ہے۔ چونکہ ماسکہ (ا، ۰) کے قطبی کی مساوات لا + ا = ۰ ہے لہذا

ماسکہ کا قطبی مکافی کا مرتّب ہے۔

اگر ق کسی نقطہ مرتّب پر واقع ہے تو ق ماسکہ س کے قطبی پر ہے۔ پس ق کا قطبی ماسکہ س میں سے گزریگا۔ پس اگر مرتّب کے کسی نقطہ سے مکافی پر خطوط مماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاطِ تماس کو ملانے والا خط ماسکہ میں سے گزریگا۔

(ج) مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو مکافی کے محور کے متوازی ہے۔

مکافی ما۲ = ۴ ا لا پر کے دو نقطوں (لا۱، ما۱) اور (لا۲، ما۲) کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات جیسا کہ ع ۵۹ (ج) میں بتایا گیا ہے۔

ما (ما۱ + ما۲) − ۴ ا لا − ما۱ ما۲ = ۰ . . . . (۱) ہے

اگر یہ خطِ مستقیم مکافی کے محور کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو

مس ط = ۴ ا / (ما۱ + ما۲) . . . . (۲)

لیکن اگر وتر کے وسطی نقطہ کے محدّد (لا، ما) ہوں تو

۲ لا = لا۱ + لا۲ اور ۲ ما = ما۱ + ما۲

پس مساوات (۲) کی رُو سے مس ط = ۴ ا / ۲ ما یعنے ما = ۲ ا جم ط . . . (۳)

جس سے ظاہر ہے کہ جب تک طہ مستقل ہے ما بھی مستقل ہے۔

∴ مکافی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو مکافی کے محور کے متوازی ہے۔

[طریق دیگر۔ خطِ مستقیم ما = مر لا + ج مکافی ما² − ۴ ر لا = ۰ کو جس مقام پر قطع کرتا ہے وہاں ۴ ر ما = مر ما² + ۴ ر ج پس ما کی اصلیں اگر ما₁، ما₂ قرار دی جائیں تو ما₁ + ما₂ = ۴ر/مر اس لیے اگر وتر کے وسطی نقطہ کا معین ما ہے تو ج کی جملہ قیمتوں کے لیے ما = ۲ر/مر]

تعریف۔ کسی مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں کا طریق **قطر** کہلاتا ہے۔ جن وتروں کی یہ قطر تنصیف کرتا ہے اس کے **معین** کہلاتے ہیں۔

فصل ۵۹ (ا) میں ہم نے دیکھا ہے کہ مکافی کا قطر مکافی سے اس کے راس سے محدود فاصلہ پر صرف ایک ہی نقطہ پر ملتا ہے۔ وہ نقطہ جہاں قطر مکافی کو قطع کرتا ہے اس قطر کا سرا کہلاتا ہے۔

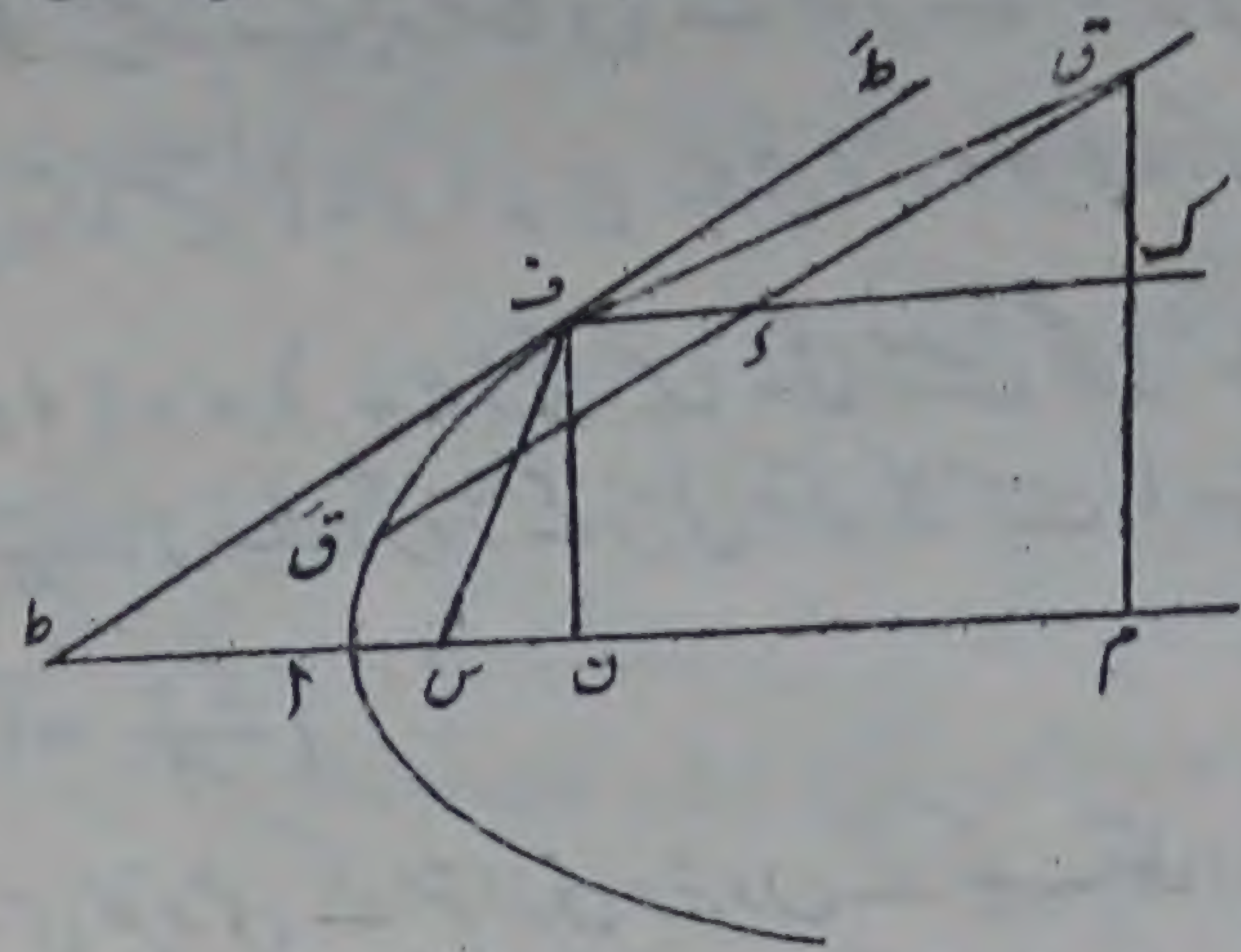
چونکہ قطر کے سرے پر کا مماس قطر کا وہ معین ہے جو مکافی سے دو منطبق نقطوں میں ملتا ہے اس لیے **مکافی کے قطر کے سرے پر کا خطِ مماس اُن وتروں کے متوازی ہے جن کی وہ قطر تنصیف کرتا ہے۔**

(د) مکافی کی مساوات جبکہ اس کا کوئی قطر اور اس کے سرے پر کا خطِ مماس محدد مانے جائیں۔

فرض کرو شکل (۲۹) میں ف مکافی کے قطر کا سرا ہے اور ف پر کا خطِ مماس محور کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ تب ن ف = ۲ ر مم طہ [فصل ۶۰ (ج)]

∴ ا ن = ف ن^{2} / ۴ ا = ا مم^{2} طہ

فرض کرو نقطۂ ق کے محدد نئے محددوں کے لحاظ سے بالترتیب لا اور ما ہیں۔ ق م مکافی کے محور پر علی القوائم کھینچو۔ اور اُسے مکافی کے قطر ف ء کو نقطہ ک میں منقطع کرنے دو۔



شکل ۲۹

تب　م ق = ن ف + ک ق = ۲ ا مم طہ + ما جب طہ . . . . (۱)

ا م = ا ن + ن م = ا ن + ف ء + ء ک = ا مم^{2} طہ + لا + ما جم طہ . . . . (۲)

لیکن ق م^{2} = ۴ ا × ا م

پس (۱) اور (۲) سے (۲ ا مم طہ + ما جب طہ)^{2} = ۴ ا (ا مم^{2} طہ + لا + ما جم طہ)

یا　ما^{2} جب^{2} طہ = ۴ ا لا . . . . (۳)

لیکن ا ن = ا مم^{2} طہ لہٰذا س ف = ا + ا ن = ا / جب^{2} طہ

∴ س ف یا ا / جب^{2} طہ کے لیے ا' لکھنے سے منحنی کی مساوات

ما^{2} = ۴ ا' لا . . . . (۴)

چونکہ کسی منحنی کی مساوات کا درجہ اس کے محوروں کی تبدیلی سے نہیں بدلتا لہٰذا مکافی کی مساوات ما^{2} - ۴ ا لا = ۰ اس کے محوروں میں خواہ کیسی ہی تبدیلی عمل میں آئے شکل (ل لا + م ما + ن)^{2} + (ل' لا + م' ما + ن') = ۰ اختیار کرتا ہے یعنے مکافی کی مساوات میں جبکہ وہ کوئی سے محوروں سے متعلق ہوتی ہے دوسرے درجہ کی رقمیں بشکل ایک مکمل مربع کے ہوتی ہیں۔

بصورت معکوس، (ل لا + م ما + ن)^۲ + (لَ لا + مَ ما + نَ) = ۰ کی شکل کی کوئی سی مساوات جس میں دوسرے درجہ کی رقمیں بہ شکل ایک مکمل مربع کے ہوتی ہیں خط مکافی کو تعبیر کرتی ہیں۔ اور ہم دیکھتے ہیں کہ خط ل لا + م ما + ن = ۰ پر مکافی پر کے کسی نقطہ کا عمود اسی نقطہ سے خط لَ لا + مَ ما + نَ = ۰ پر کے عمود کے متناسب ہے۔ جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہم ان خطوط کو لا اور ما کے نئے محور قرار دیں تو مکافی کی مساوات شکل ما^۲ = پ لا میں تحویل ہو جاتی ہے۔ پس مساوات (ل لا + م ما + ن)^۲ + لَ لا + مَ ما + نَ = ۰ ایک مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا ایک قطر ل لا ـ م ما + ن = ۰ ہے اور اس قطر کے سرے پر کا خطِ مماس لَ لا + مَ ما + نَ = ۰ ہے۔

(ہ)۔ اگر کسی مکافی کی مساوات اس کے کسی قطر اور قطر کے سرے پر کے مماس کو محور مان کر ما^۲ ـ ۴ ا لا = ۰ قرار دی جائے تو (۱) خط ما = مر لا + ا/مر مر کی تمام قیمتوں کے لیے مکافی کا ایک خطِ مماس ہوگا۔ (۲) مکافی کے کسی نقطہ (لاَ، ماَ) پر کے خطِ مماس کی مساوات ما ماَ ـ ۲ ا (لا + لاَ) = ۰ ہوگی۔ اسی طرح (۳) مکافی کے لحاظ سے (لاَ، ماَ) کے قطبی کی مساوات ما ماَ ـ ۲ ا (لا + لاَ) = ۰ اور (۴) خط ما = مر لا کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کے طریق کی مساوات ما = ۲ ا/مر ہوگی۔

واضح ہو کہ مصرحۂ بالا چار مسئلوں کے از سر نو ثبوت کی اس لیے ضرورت نہیں کہ ع ۵۹ (ب) اور (ج)، اور ع ۶۰ (ا) اور (ج)، کے نتائج، محور خواہ علی القوائم ہوں یا نہیں صحیح ہیں۔

مثال (۱)۔ مکافی کے دو ایسے خطوطِ مماس کے نقطۂ تقاطع کے طریق کی مساوات جو باہمدیگر ایک دیے ہوئے زاویہ پر مائل ہوں

خط ما = مر لا + ا/مر مکافی ما^۲ = ۴ ا لا کا ایک مماس ہے مر کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔ اگر لا، ما معلوم مانے جائیں تو مساوات مر^۲ لا ـ مر ما + ا = ۰ سے

ان مماسوں کی سمتیں دریافت ہوتی ہیں جو اس نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔

اگر اس دودرجی مساوات کی اصلیں م_1، م_2 ہوں تو

$$\text{م}_1 + \text{م}_2 = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} \quad \text{اور} \quad \text{م}_1\text{م}_2 = \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$$

$$\therefore (\text{م}_1 - \text{م}_2)^2 = \frac{\text{ما}^2 - 4\,\text{الا}}{\text{لا}^2}$$

لیکن اگر یہ دو خطوطِ مماس باہمدگر زاویہ ع بناتے ہیں تو

$$\text{مس ع} = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{1 + \text{م}_1\text{م}_2}$$

$$\therefore \text{مس}^2\text{ع} = \frac{\text{ما}^2 - 4\,\text{الا}}{(\text{ا} + \text{لا})^2}$$

پس مطلوبہ طریق کی مساوات $\text{ما}^2 - 4\,\text{الا} - (\text{لا} + \text{ا})^2\,\text{مس}^2\text{ع} = 0$ ہے

مثال (۲)۔ مکافی کے دو ایسے عمادوں کے نقطۂ تقاطع کی مساوات جو باہمدیگر علی القوائم ہیں۔

م کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو خط $\text{ما} = \text{م لا} - 2\,\text{ا م} - \text{ا م}^3$ ......(۱) مکافی $\text{ما}^2 = 4\,\text{ا لا}$ کا ایک عماد ہے۔ اگر نقطہ (لا، ما) معلوم مانا جائے مساوات (۱) اس نقطہ میں سے گزرنے والے عمادوں کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہے۔

اگر اس مساوات کی اصلیں م_1، م_2، م_3 ہوں تو

$$\text{م}_1\text{م}_2\text{م}_3 = -\frac{\text{ما}}{\text{ا}} \quad \ldots\ldots (2)$$

لیکن اگر ان میں سے دو عماد بالفرض م_1، م_2 علی القوائم ہیں تو

$$\text{م}_1\text{م}_2 = -1$$

پس مساوات (۲) کی رُو سے $\text{م}_3 = \frac{\text{ما}}{\text{ا}}$

لیکن م_3 مساوات (۱) کی ایک اصل ہے۔ لہذا $\text{ما} = \frac{\text{لا ما}}{\text{ا}} - 2\,\text{ما} - \frac{\text{ما}^3}{\text{ا}^2}$

$$\therefore \text{ما}^2 = \text{ا}\,(\text{لا} - 3\,\text{ا})$$

سوالات ۸ (ب)

(۱) ثابت کرو کہ مکافی ما^2 = ۴ ا لا اور مکافی لا^2 = ۴ ب ما باہمدیگر زاویہ

مس$^{-1}$ $\frac{۳\, ا^{\frac{1}{3}}\, ب^{\frac{1}{3}}}{۲\,(ا^{\frac{2}{3}} + ب^{\frac{2}{3}})}$ پر متقاطع ہیں۔

(۲) اگر ف س ق ایک مکافی کا ماسکی وتر ہو اور ف ا مرتب سے نقطہ م پر ملے تو بتاؤ کہ م ق مکافی کے محور کے متوازی ہوگا۔

(۳) ثابت کرو کہ مکافی کے دو ایسے نقطوں پر کے خطوطِ مماس کے نقطۂ تقاطع کا طریق جن کے سعین باہمدیگر مستقل نسبت رکھتے ہیں ایک مکافی ہے۔

(۴) ایک مکافی کے وتر خاص کے کسی نقطہ سے اس کے (یعنے وتر خاص کے) سروں پر کے خطوط مماس پر عمود ڈالے جاتے ہیں۔ بتاؤ کہ ان عمودوں کے پیروں کو ملانے والا خط مکافی کو مس کرتا ہے۔

(۵) کسی نقطہ ط سے بہ لحاظ مکافی اس کے قطبی پر جو عمود ط ن کھینچا جاتا ہے محور سے نقطہ م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ط ن × ط م مستقل ہے تو ط کا طریق ایک مکافی ہے۔ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ اگر ط ن : ط م کی نسبت مستقل ہے تو اس صورت میں بھی طریق ایک مکافی ہے۔

(۶) بتاؤ کہ مکافی کے ایک ایسے وتر کے وسطی نقطہ کا طریق جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے ایک مکافی ہے۔

(۷) مکافی کے کسی نقطہ و میں سے کھینچا ہوا قطر اگر کسی وتر سے ف پر ملے اور اس وتر کے سروں پر کے خطوطِ مماس قطر سے ق، قَ پر ملیں تو بتاؤ کہ و ف^2 = و ق × و قَ

(۸) ثابت کرو کہ دائرہ لا^2 + ما^2 − ۲ ا لا − ۳ ا^2 = ۰ کے کسی نقطہ کا قطبی بہ لحاظ دائرہ لا^2 + ما^2 + ۲ ا لا − ۳ ا^2 = ۰ مکافی ما^2 + ۴ ا لا = ۰ کو مس کریگا۔

(۹) اگر ایک ذو اربعۃ الاضلاع کسی مکافی کا حائط ہو تو اس ذو اربعۃ الاضلاع کے وتروں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا خط مکافی کے محور کے متوازی ہوگا۔

(۱۰) اگر مکافی کے ماسکی وتر کے کسی نقطہ سے دو خطوطِ مماس کھینچے جائیں تو یہ خطوط مماس اس ماسکی وتر کے سروں پر کے خطوطِ مماس کے ساتھ مساوی مائل ہونگے۔

(۱۱) مکافی کے ایک ایسے وتر کے وسطی نقطہ کا طریق دریافت کرو جو مکافی کے راس کے مقابل ایک زاویۂ قائمہ بناتا ہے۔

(۱۲) مکافی کے تین نقطوں ف، ق، ر پر کے عماد ایک نقطۂ و میں باہمدیگر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ س ف + س ق + س ر + س ا = ۲ و م، جس میں س مکافی کا ماسکہ ہے، ا اس کا راس ہے۔ اور و م نقطہ و سے راس پر کے خطِ مماس پر ڈالا ہوا عمود ہے۔

(۱۳) ثابت کرو کہ مکافی کے تین عمادوں سے بنے ہوئے مثلث کا رقبہ $\frac{ل^۲}{۲}$ (م۱ − م۲)(م۲ − م۳)(م۳ − م۱)(م۱ + م۲ + م۳)^۲

(۱۴) مکافی کے کسی دو ماسکی وتروں کو قطر مان کر ان پر دائرے کھینچے جاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا مشترک وتر مکافی کے راس میں سے گزرتا ہے۔

(۱۵) اگر ا ب ج ایک مکافی کا اندرونی مثلث ہے اور اَ بَ جَ ایک ایسا مثلث ہے جو مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے متوازی کھینچے ہوئے تین خطوطِ مماس سے بنا ہے۔ بتاؤ کہ ا ب ج کے ضلعے اَ بَ جَ کے متناظر ضلعوں کے چہار چند ہونگے۔

(۱۶) ف گ مکافی ی^۲ = ۴ ل لا کے نقطہ ف پر کا عماد ہے۔ گ محور پر واقع ہے اور گ ف باہر کی طرف آگے کو ق تک بڑھایا گیا ہے اس طرح کہ ف ق = گ ف۔ ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک مکافی ہے۔ اور ف اور ق جن مکافیوں پر واقع ہیں انکے اُن نقطوں پر کے خطوطِ مماس کے تقاطع کا طریق ی^۲ (لا + ۴ ل) + ۱۶ ل^۳ = ۰ ہے۔

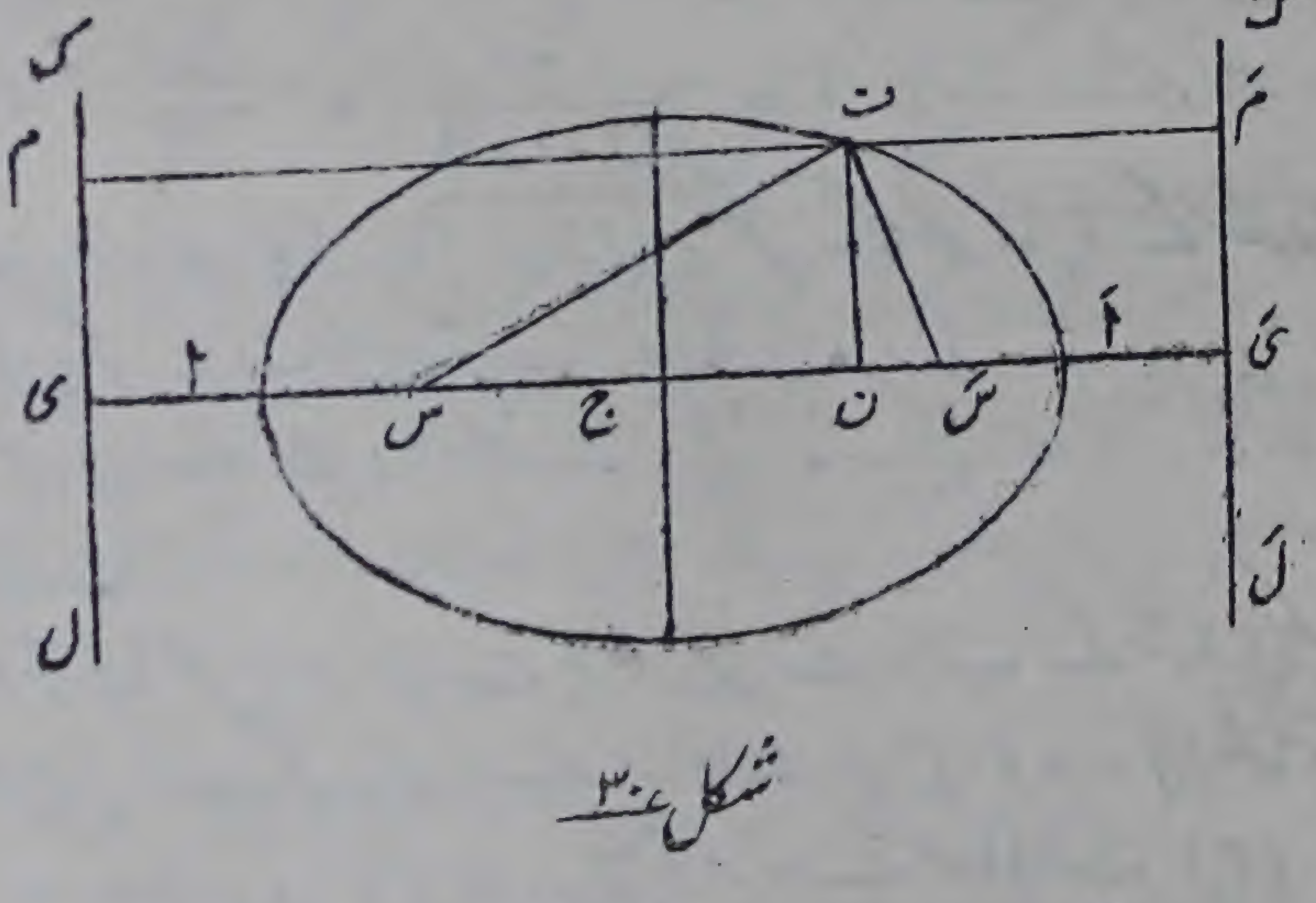
نواں باب

خطِ ناقص کی مساواتیں

۶۱- تعریف - جب کوئی نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے جو ماسکہ کہلاتا ہے ایک ثابت خطِ مستقیم کے فاصلہ کے ساتھ (جوکہ مرتب کہلاتا ہے) اکائی سے کمتر مستقل نسبت رکھتا ہے تو اس نقطہ کا طریق خطِ ناقص ہے۔

(ا) خطِ ناقص کی مساوات۔

فرض کرو س ماسکہ اور ک ل مرتّب ہے (شکل ۳۰) - س ی مرتّب



شکل ۳۰

پر عمود ڈالو - ی س کو ا پر اس طرح تقسیم کرو کہ س ا / ا ی = ز / ا جس میں

ز ایک سے کم ہے ۔

ی س کو آگے بڑھانے پر ایک نقطہ اَ ایسا پایا جائیگا جس کے لیے

س اَ / ی اَ = ز / ۱ ، ج کو ا اَ کا وسطی نقطہ مانو اور ا اَ = ۲ ل

تب ا س = ز × ی ا اور س اَ = ز × ی اَ

∴ ا س + س اَ = ز (ی ا + ی اَ)

پس ۲ ا ج = ۲ ز × ی ج ∴ ی ج = ل / ز .... (۱)

نیز س اَ − ا س = ز (ی اَ − ی ا)

یعنی ا اَ − ۲ ا س = ز × ا اَ

∴ س ج = ز × ا ج = ل × ز .... (۲)

اب نقطہ ج کو مبداء، ج اَ کو لا کا محور اور ج میں سے ایک خط ا اَ کا علی القوائم ما کا محور مانو۔

فرض کرو ف منحنی پر کوئی سا ایک نقطہ ہے اور اس کے محدد لا، ما ہیں

تب س ف^2 = ز^2 × ف م^2 ∴ س ن^2 + ن ف^2 = ز^2 × ی ن^2

لیکن س ن = س ج + ج ن = ل × ز + لا اور ی ن = ی ج + ج ن = ل / ز + لا

پس (ل ز + لا)^2 + ما^2 = ز^2 (لا + ل / ز)^2 یعنی ما^2 + لا^2 (۱ − ز^2) = ل^2 (۱ − ز^2)

∴ لا^2 / ل^2 + ما^2 / ل^2 (۱ − ز^2) = ۱ .... (۳)

لا = ۰ لکھنے سے ما = ± ل √(۱ − ز^2) یہ منحنی کے محور ما پر کے مقطوعات ہیں۔

اگر ان طولوں کو ± ب کہیں تو ب^2 = ل^2 (۱ − ز^2) .... (۴)

اور منحنی کی مساوات (۳) صورت لا^2 / ل^2 + ما^2 / ب^2 = ۱ .... (۵) اختیار کرلیتی ہے۔

وترِ خاص وہ وتر ہے جو محور میں سے مرتب کے متوازی کھینچا جاتا ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے مساوات (۵) میں لا = − ل ز لکھا جائے

تب ما^2 = ب^2 (۱ − ز^2) = ب^4 / ل^2 از روئے مساوات (۴)

پس نیم وترِ خاص کا طول = ب^2 / ل

مساوات (۵) میں ما کی قیمت ب سے بڑھ نہیں سکتی ورنہ لاَ منفی مقدار ہو جائیگی۔ اسی طرح لا کی قیمت ا سے بڑھ نہیں سکتی۔ پس خطِ ناقص ایک ایسا منحنی ہے جو تمام سمتوں میں محدود ہے۔

اگر لا عدداً ا سے کم ہو تو ما^۲ مثبت مقدار ہوگی اور لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے ما کی دو مساوی اور بلحاظ علامت مختلف قیمتیں ہونگی۔ پس لا کا محور اِس منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

اسی طرح اگر ما عدداً ب سے کم ہو تو لا^۲ مثبت مقدار ہوگی اور ما کی کسی مخصوص قیمت کے لیے لا کی دو مساوی اور باہمدیگر مخالف قیمتیں ہونگی۔ پس ما کا محور خطِ ناقص کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر لا کے محور پر سَ اور یَ دو ایسے نقطے لیے جائیں کہ ج سَ = س ج اور ج یَ = ی ج تو نقطۂ سَ بھی منحنی کا ایک ماسکہ ہوگا اور یَ میں سے ج یَ پر علی القوائم کھینچا ہوا خط اس کا تناظر مرتب ہوگا۔

اگر (لاَ، ماَ) منحنی پر کا کوئی نقطہ ہو تو لاَ ماَ مساوات لا^۲/ا^۲ + ما^۲/ب^۲ - ۱ = ۰ کی شرط کو پورا کریگا۔ اور ایسی صورت میں محدد ـ لاَ اور ـ ماَ کے لیے بھی یہ مساوات صادق آئیگی۔ لہذا نقطہ (ـ لاَ، ـ ماَ) بھی اس منحنی پر واقع ہوگا۔ لیکن (لاَ، ماَ) اور (ـ لاَ، ـ ماَ) نقطے مبداء میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم پر ہیں اور مبداء سے مساوی فاصلے رکھتے ہیں۔ پس مبداء اس میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے منحنی کا مرکز ہے۔

ماسکوں میں سے گزرنے والا وتر محورِ اعظم کہلاتا ہے اور مرکز میں سے اس پر علی القوائم گزرنے والا وتر محورِ اقل کہلاتا ہے۔

(ب) ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کی تعیین

شکل بالا میں چونکہ س ف = ز × ف م لہذا س ف = ز × ی ن
= ز (ی ج + ج ن) = ز (ا/ز + لا) = ا + ز لا

اور س' ف = ز × ن ی' = ز (ج ی' - ج ن) = ا - ز لا

پس　س ف + س' ف = ۲ ا

اِس خواص کے مدنظر ناقص کی بعض اوقات یوں تعریف کی جاتی ہے کہ وہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جس کے فاصلوں کا حاصل جمع دو ثابت نقطوں سے مستقل ہے۔

اِس تعریف سے آغاز کرکے ناقص کی مساوات حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ یہ مستقل حاصل جمع ۲ ا ہے اور ان دو ثابت نقطوں کا درمیانی فاصلہ ۲ ا ز ہے۔ اِن ثابت نقطوں کو ملانے والے خط کے وسطی نقطہ کو مبداء مانو اور اِس خط کو اور اس کے علی القوائم خط کو محدد قرار دو۔ تب منحنی کی مسلّمہ شرط کے بموجب

√((لا - ا ز)^{2} + ما^{2}) + √((لا + ا ز)^{2} + ما^{2}) = ۲ ا

اس کو منطق بنانے پر ما^{2} + لا^{2} (۱ - ز^{2}) = ا^{2} (۱ - ز^{2}) اور یہ ناقص کی وہی مساوات ہے جو قبل ازیں دوسری تعریف کے ذریعہ سے حاصل کی گئی ہے۔

(ج) خطِ ناقص کی قطبی مساوات۔

اگر مرکز کو قطب مانا جائے تو مساوات لا^{2}/ا^{2} + ما^{2}/ب^{2} = ۱ میں لا کے عوض ر جم طہ اور ما کے عوض ر جب طہ لکھنے سے قطبی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ چنانچہ یہ مساوات

ر^{2} جم^{2} طہ/ا^{2} + ر^{2} جب^{2} طہ/ب^{2} = ۱ ہے یعنی ۱/ر^{2} = جم^{2} طہ/ا^{2} + جب^{2} طہ/ب^{2} ...... (۱)

مساوات (۱) صورت ۱/ر^{2} = ۱/ا^{2} + (۱/ب^{2} - ۱/ا^{2}) جب^{2} طہ .... (۲) میں لکھی جا سکتی ہے۔

چونکہ ۱/ب^{2} - ۱/ا^{2} مثبت ہے اِس لیے مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ ۱/ر^{2} کی اقل قیمت ۱/ا^{2} ہے۔ اور جیسے جیسے طہ صفر سے بڑھ کر π/۲ ہوتا ہے ویسے ہی ۱/ر^{2} کی قیمت بڑھتی جاتی ہے۔ اس کی اعظم قیمت ۱/ب^{2} ہوتی ہے۔ پس نیم قطر

سمتی ا سے گھٹ کر ب ہوتا جیسے طہ صفر سے بڑھ کر $\frac{\pi}{2}$ ہوتا ہے۔

[نوٹ — ہم نے دیکھا ہے کہ مرکز کو مبداء ماننے سے اُن تمام نقطوں کے لیے جو ناقص پر واقع ہیں $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - 1 = 0$۔ خط مکافی کی صورت میں جیسا کہ بتایا گیا تھا اسی طرح ناقص کے لیے بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر لا، ما منحنی کے اندر کے کسی نقطہ کے محدد ہوں تو جملہ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - 1$ منفی ہوگا اور اگر وہ منحنی کے باہر کے کسی نقطہ سے متعلق ہوں تو $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - 1$ مثبت ہوگا]۔

(د) کسی دیے ہوئے خطِ مستقیم اور ناقص کے نقاطِ تقاطع کی تعیین اور اس خط کے منحنی کو مس کرنے کے شرائط۔

فرض کرو کہ خطِ مستقیم کی مساوات $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} + \text{ج}$ ہے اور ناقص کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$۔

اس خط اور اِس منحنی کے مشترک نقطوں کے لیے یہ دونوں مساواتیں صحیح ہونگی لہذا اِن مشترک نقطوں پر $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{(\text{م}\,\text{لا} + \text{ج})^2}{\text{ب}^2} = 1$

یعنی $\text{لا}^2 (\text{ب}^2 + \text{ا}^2 \text{م}^2) + 2\,\text{م}\,\text{ج}\,\text{ا}^2\,\text{لا} + \text{ا}^2 (\text{ج}^2 - \text{ب}^2) = 0$

یہ دو درجی مساوات ہے جس کی دو اصلیں ہونگی حقیقی، منطبق یا خیالی۔

پس لا کی دو قیمتیں ہونگی اور اُن کو خطِ مستقیم کی مساوات میں درج کرنے سے ما کی دو متناظر قیمتیں دریافت ہو جائینگی۔

لا کی دو قیمتیں باہمدیگر مساوی ہونگی اگر $\text{ا}^2 (\text{ج}^2 - \text{ب}^2)(\text{ب}^2 + \text{ا}^2 \text{م}^2) = \text{م}^2 \text{ج}^2 \text{ا}^4$

یعنی اگر $\text{ج}^2 = \text{ا}^2 \text{م}^2 + \text{ب}^2$

پس اِس صورت میں ما کی دو قیمتیں بھی مساوی ہونگی۔ پس دو نقطے جن میں دیا ہوا خطِ مستقیم ناقص کو منقطع کرتا ہے منطبق ہونگے اگر $\text{ج} = \pm\sqrt{\text{ا}^2 \text{م}^2 + \text{ب}^2}$

پس م کی جملہ قیمتوں کے لیے خطِ مستقیم $\text{ما} = \text{م}\,\text{لا} \pm \sqrt{\text{ا}^2 \text{م}^2 + \text{ب}^2}$ دیے ہوئے ناقص کو مس کریگا۔ چونکہ جذر المربع کی علامت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے اس لیے واضح ہے کہ م کی ہر ایک قیمت کے لحاظ سے ناقص کے دو خطِ مماس ہوتے ہیں جو باہمدیگر متوازی ہیں۔ یہ دو متوازی خطِ مماس ناقص کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر

واقع ہیں ۔

(۵) ناقص پر کے کوئی سے دو نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات اور منحنی کے کسی نقطہ پر کے خطِ مماس کی مساوات

فرض کرو ناقص پر کے دو نقطوں کے محدد لا_1، ما_1 اور لا_2، ما_2 ہیں۔ ان کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\text{لا}_1 - \text{لا}_2} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\text{ما}_1 - \text{ما}_2}$$ ہے .... (۱)

چونکہ یہ نقطے ناقص پر واقع ہیں اس لیے $\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} = 1$ اور $\frac{\text{لا}_2^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_2^2}{\text{ب}^2} = 1$

پس $$\frac{\text{لا}_1^2 - \text{لا}_2^2}{\text{ا}^2} = - \frac{\text{ما}_1^2 - \text{ما}_2^2}{\text{ب}^2}$$ .... (۲)

(۱) اور (۲) کے سیدھے جانب کے جملوں کو باہمدیگر ضرب دینے اور اسی طرح ان کے بائیں جانب کے جملوں کو باہمدیگر ضرب دینے سے

$$\frac{(\text{لا} - \text{لا}_1)(\text{لا}_1 + \text{لا}_2)}{\text{ا}^2} = - \frac{(\text{ما} - \text{ما}_1)(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)}{\text{ب}^2}$$

یعنی $$\frac{\text{لا}(\text{لا}_1 - \text{لا}_2)}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)}{\text{ب}^2} = \frac{\text{لا}_1^2 + \text{لا}_1\,\text{لا}_2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2 + \text{ما}_1\,\text{ما}_2}{\text{ب}^2}$$

یا $$\frac{\text{لا}(\text{لا}_1 + \text{لا}_2)}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}(\text{ما}_1 + \text{ما}_2)}{\text{ب}^2} = 1 + \frac{\text{لا}_1\,\text{لا}_2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1\,\text{ما}_2}{\text{ب}^2}$$ ...... (۳)

پس ناقص کے نقطوں (لا_1، ما_1) اور (لا_2، ما_2) کو ملانے والے خطِ مستقیم یعنی وتر کی یہی مساوات ہے۔ مماس کی صورت میں $\text{لا}_2 = \text{لا}_1$ اور $\text{ما}_2 = \text{ما}_1$

پس $$\frac{\text{لا}\,\text{لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = 1$$ ...... (۴) (لا_1، ما_1) پر کے خطِ مماس کی مساوات ہے۔

نتائج صریح۔ (۱) محورِ اعظم کے سروں کے محدد (ا، ۰) اور (−ا، ۰) ہیں،

پس ازروئے مساوات (۳) اِن نقطوں پر کے خطوطِ مماس کی مساواتیں علی الترتیب
لا = ا اور لا = - ا ہیں پس یہ مماس محورِ اقل کے متوازی ہیں۔ اس طرح
محورِ اقل کے سروں پر کے خطوطِ مماس محورِ اعظم کے متوازی ہیں۔

(۲) ناقص کے کسی نقطہ لا'، ما' پر کا خطِ مماس نقطہ (- لا'، - ما') پر کے
خطِ مماس کے متوازی ہے اور یہ دونوں نقطے منحنی کے مرکز میں سے گزرنے والے
خط پر واقع ہیں۔

پس ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی وتر کے سروں پر کے
خطوطِ مماس باہمدیگر متوازی ہیں۔

(و) خط ل لا + م ما + ن = ۰ کے ناقص کو مس کرنے کی شرط۔

مبداء کو اِن نقطوں سے ملانے والے خط کی مساوات جہاں خطِ مستقیم
ل لا + م ما + ن = ۰ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ کو قطع کرتا ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \left(\frac{\text{ل لا} + \text{م ما}}{\text{ن}}\right)^2 = ۰ \text{ ہے۔}$$

اس لیے کہ $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱ = \left(\frac{\text{ل لا} + \text{م ما}}{\text{ن}}\right)^2$ پس $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \left(\frac{\text{ل لا} + \text{م ما}}{\text{ن}}\right)^2 = ۰$ ---(۱)

جو ایک متجانس درجۂ دوم کی مساوات ہے اور اس لیے مبداء میں سے گزرنے والے
دو خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر دیا ہوا خط ناقص کو دو منطبق نقطوں میں ملتا ہے تو مساوات (۱) دو منطبق
خطوط کو تعبیر کریگی۔ لہذا مساوات (۱) کے سیدھے جانب کا جملہ ایک مکمل مربع
ہونا چاہیے۔ اس کے لیے شرط یہ ہے کہ

$$\left(\frac{۱}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ل}^2}{\text{ن}^2}\right)\left(\frac{۱}{\text{ب}^2} - \frac{\text{م}^2}{\text{ن}^2}\right) = \frac{\text{ل}^2\text{م}^2}{\text{ن}^4}$$

یعنی $\text{ا}^2\text{ل}^2 + \text{ب}^2\text{م}^2 = \text{ن}^2$ .... (۲)

[طریقہ دیگر - خطِ مستقیم کی مساوات ہے $ما = -\frac{(ل\,لا + ن)}{م}$

پس ناقص کی مساوات $ب^2 لا^2 + ا^2 ما^2 = ا^2 ب^2$ میں ما کی یہ قیمت درج کرنے سے

$$ب^2 م^2 لا^2 + ا^2 (ل\,لا + ن)^2 = ا^2 ب^2 م^2$$

یعنی $(ب^2 م^2 + ا^2 ل^2)\, لا^2 + ۲ ا^2 ل\, ن\, لا + ا^2 (ن^2 - ب^2 م^2) = ۰$

$$\therefore لا = \frac{-۲ ا^2 ل\, ن \pm \sqrt{۴ ا^4 ل^2 ن^2 - ۴ ا^2 (ن^2 - ب^2 م^2)(ب^2 م^2 + ا^2 ل^2)}}{۲ (ب^2 م^2 + ا^2 ل^2)}$$

لا کی یہ دونوں اصلیں مساوی ہونے کے لیے علامت جذر المربع کے اندر کا جملہ صفر ہونا چاہیے۔

یعنی $ا^2 ل^2 ن^2 - (ن^2 - ب^2 م^2)(ب^2 م^2 + ا^2 ل^2) = ۰$

$\therefore ا^2 ل^2 + ب^2 م^2 = ن^2$]

نتیجۂ صریح - خطِ مستقیم $لا\, جم\, ط + ما\, جب\, ط = ع$ ناقص کو مس کریگا اگر

$ا^2 جم^2 ط + ب^2 جب^2 ط = ع^2$ .... (۳)

(ز) ناقص کے کسی نقطہ پر کے عمود کی مساوات۔

ناقص کے کسی نقطہ $(لا_1، ما_1)$ پر کے مماس کی مساوات $\frac{لا\, لا_1}{ا^2} + \frac{ما\, ما_1}{ب^2} = ۱$

اس مماس پر جو خطِ عمود ہوگا اس کی مساوات $\frac{ما_1}{ب^2} لا - \frac{لا_1}{ا^2} ما + ج = ۰$ ہے

جس میں ج کوئی سا مستقل ہے۔ اس خاص علی القوائم خط کے لیے جو نقطۂ $لا_1، ما_1$ میں سے گزرتا ہے

مساوات $\frac{ما_1 لا_1}{ب^2} - \frac{ما_1 لا_1}{ا^2} + ج = ۰$ پس $ج = ما_1 لا_1 \left(\frac{۱}{ا^2} - \frac{۱}{ب^2}\right)$

پس ناقص کے نقطہ $(لا_1، ما_1)$ پر کے عمود کی مساوات $\frac{ما_1}{ب^2} لا - \frac{لا_1}{ا^2} ما + ما_1 لا_1 \left(\frac{۱}{ا^2} - \frac{۱}{ب^2}\right) = ۰$ ہے

یعنی $ما_1 ا^2 لا - لا_1 ب^2 ما + ما_1 لا_1 (ب^2 - ا^2) = ۰$

یعنی $ما_1 ا^2 (لا - لا_1) = لا_1 ب^2 (ما - ما_1)$ ہے

جو بشکل $\frac{لا - لا_1}{\frac{لا_1}{ا^2}} = \frac{ما - ما_1}{\frac{ما_1}{ب^2}}$ لکھی جا سکتی ہے۔

(ح) کسی نقطہ سے ناقص پر دو خطِ مماس کھینچے جا سکتے ہیں جو بلحاظ اس کے کہ نقطہ ناقص کے باہر، ناقص کے اوپر یا اُس کے اندر ہو، حقیقی، منطبق یا خیالی ہوتے ہیں ۔

فصل (ج) میں بتایا گیا ہے کہ خطِ مستقیم جس کی مساوات $ما = م لا + \sqrt{ا^۲ م^۲ + ب^۲}$ ....(۱)
ہے ناقص کو چھوتا ہے م کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو ۔
خط (۱) نقطہ $(لا_۱، ما_۱)$ میں سے گزرنے کے لیے $ما_۱ = م لا_۱ + \sqrt{ا^۲ م^۲ + ب^۲}$ ہونا چاہیے ۔
یعنی $(ما_۱ - م لا_۱)^۲ - ا^۲ م^۲ - ب^۲ = ۰$ یا $م^۲ (لا_۱^۲ - ا^۲) - ۲ م لا_۱ ما_۱ + ما_۱^۲ - ب^۲ = ۰$ .... (۲)
مساوات بالا دو درجی مساوات ہے جس سے ناقص کے ان خطوطِ مماس کی سمتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ $(لا_۱، ما_۱)$ میں سے گزرتے ہیں ۔ دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں اس لیے کسی نقطۂ $لا_۱، ما_۱$ میں سے دو ہی خطِ مماس کھینچے جا سکینگے ۔
اِس مساوات (۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق یا خیالی ہیں بلحاظ اس کے کہ

$$(لا_۱^۲ - ا^۲)(ما_۱^۲ - ب^۲) - لا_۱^۲ ما_۱^۲$$

منفی، صفر یا مثبت ہے ۔ یا بالفاظِ دیگر بلحاظ اس کے کہ $\frac{لا_۱^۲}{ا^۲} + \frac{ما_۱^۲}{ب^۲} - ۱$
مثبت، صفر یا منفی ہے ۔ یعنی بلحاظ اس کے کہ نقطہ $(لا_۱، ما_۱)$ ناقص کے باہر ہے، اس کے اوپر ہے یا اس کے اندر واقع ہے ۔

(ط) کسی نقطہ سے ناقص پر کھینچے ہوئے دو خطِ مماس کے نقاطِ تماس میں سے گذرنے والے خط کی مساوات ۔

$(لا_۱، ما_۱)$ محدّدوں والے نقطہ سے خطِ مماس کھینچو ۔ اور نقاطِ تماس کے محدّدوں کو علی الترتیب $(ح، ک)$ اور $(حَ، کَ)$ مانو ۔
$(ح، ک)$ اور $(حَ، کَ)$ پر کے خطوطِ مماس کی مساواتیں $\frac{لا ح}{ا^۲} + \frac{ما ک}{ب^۲} = ۱$ اور

$\frac{\text{لاح}'}{\text{و}^{۲}} + \frac{\text{ماک}'}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ نقطہ (لا₁، ما₁) ان دونوں خطوں پر واقع ہے،

پس $\frac{\text{لا}_{۱}\text{ح}}{\text{و}^{۲}} + \frac{\text{ما}_{۱}\text{ک}}{\text{ب}^{۲}} = ۱ \ldots\ldots (۱)$ اور $\frac{\text{لا}_{۱}\text{ح}'}{\text{و}^{۲}} + \frac{\text{ما}_{۱}\text{ک}'}{\text{ب}^{۲}} = ۱ \ldots\ldots (۲)$

لیکن (۱) اور (۲) کے معائنہ سے واضح ہے کہ (ح، ک) اور (ح′، ک′) نقطے دونوں اس خطِ مستقیم پر واقع ہیں جس کی مساوات $\frac{\text{لا}_{۱}\text{لا}}{\text{و}^{۲}} + \frac{\text{ما}_{۱}\text{ما}}{\text{ب}^{۲}} = ۱ \ldots\ldots (۳)$ ہے لہذا مساوات (۳) نقطہ (لا₁، ما₁) سے کھینچے ہوئے خطوطِ مماس کے نقاطِ تماس میں سے گزرنے والے خط کی مساوات ہے۔

کسی نقطہ ف سے کسی ناقص تک کھینچے ہوئے دو خطوطِ مماس کے نقاطِ تماس کو ملانے والے خط کو ف کا قطبی بلحاظ ناقص کہتے ہیں۔

(ی) اگر کسی ناقص کے لحاظ سے نقطہ ف کا قطبی نقطہ ق میں سے گزرتا ہے تو ق کا قطبی ف میں سے گزریگا۔

اِس کا ثبوت دائرہ اور مکافی والے مسئلہ کے ثبوت کے بالکل مشابہ ہے۔

(ک) ناقص کے باہمدیگر علی القوائم دو خطِ مماس کے نقطۂ تقاطع کا طریق۔

خطِ مستقیم جس کی مساوات $\text{ما} = \text{مر}\,\text{لا} + \sqrt{\text{و}^{۲}\text{مر}^{۲} + \text{ب}^{۲}}$ ہے ناقص کو مَس کریگا مر کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔ اگر ہم لا اور ما کو معلومہ تصور کریں تو یہ مساوات اُن خطوطِ مماس کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہے جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں۔

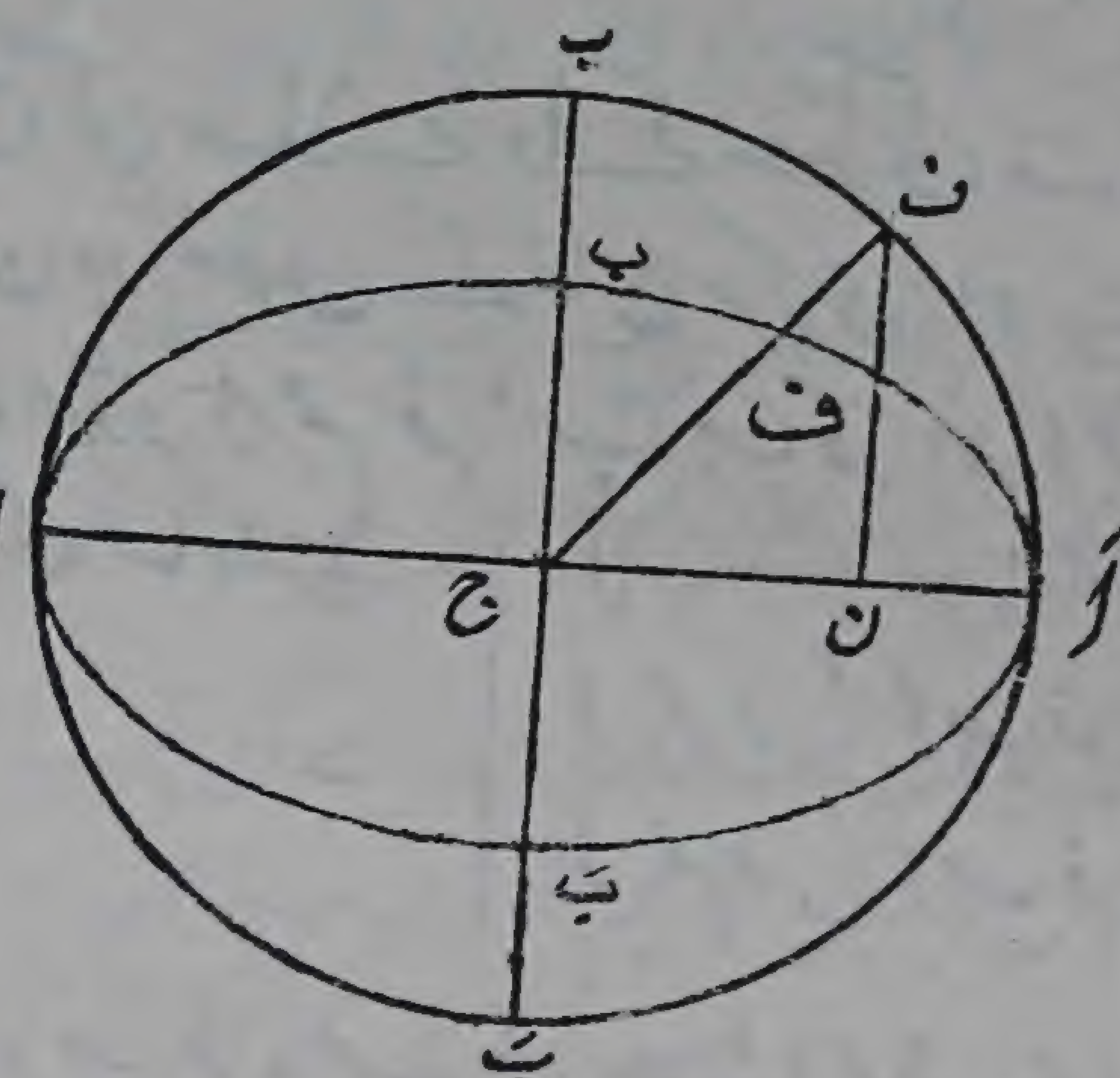
مساوات کو منطق بنانے سے وہ $\text{مر}^{۲}(\text{لا}^{۲} - \text{و}^{۲}) - ۲\,\text{مر}\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^{۲} - \text{ب}^{۲} = ۰$ ہو جاتی ہے۔

فرض کرو اس مساوات کی اصلیں مر₁ اور مر₂ ہیں۔ خطوطِ مماس علی القوائم ہونگے اگر

$$\text{مر}_{۱}\text{مر}_{۲} = -۱ \quad \text{پس} \quad \frac{\text{ما}^{۲} - \text{ب}^{۲}}{\text{لا}^{۲} - \text{و}^{۲}} = -۱ \quad \text{یعنی} \quad \text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = \text{و}^{۲} + \text{ب}^{۲}$$

پس مطلوبہ طریق کی یہی مساوات ہے۔ ظاہر ہے کہ یہ طریق ایک دائرہ ہے۔ اس کو ناقص کا **مرتب دائرہ** کہتے ہیں۔

(ل) ناقص کے محورِ اعظم کو قُطر مان کر اس پر جو دائرہ کھینچا جاتا ہے **امدادی دائرہ** کہلاتا ہے۔



شکل ۳۱

اگر ناقص کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ مانی جائے تو اس کے امدادی دائرہ کی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ا}^2} = ۱$ ہوگی۔

پس اگر ناقص کا کوئی سا معین ن ف آگے کو بڑھا کر امدادی دائرہ سے فَ پر ملا دیا جائے تو اِن دونوں مساواتوں سے واضح ہے کہ

$$\frac{\text{ن ح}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ن ف}^2}{\text{ب}^2} = ۱ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ن ح}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ن فَ}^2}{\text{ا}^2} = ۱$$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{ن ف}^2}{\text{ب}^2} = \frac{\text{ن فَ}^2}{\text{ا}^2} \quad \therefore \quad \frac{\text{ن ف}}{\text{ن فَ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$$

پس ناقص اور دائرہ کے معینّوں کے درمیان ایک مستقل نسبت ہوتی ہے۔

زاویہ اَ ج فَ نقطۂ ف کا **خارج مرکزی زاویہ** کہلاتا ہے۔

نقطہ ف جو امدادی دائرہ پر واقع ہے ناقص کے نقطہ ف کا متناظر مقصود ہوتا ہے۔

اگر زاویہ اَجَ ف کو فہ سے مخاطب کریں تو ف کے محدّد ا جم فہ اور ا جب فہ ہونگے اور ف کے محدّد ا جم فہ اور ب جب فہ

(م) ناقص کے دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویے اگر دیے جائیں تو اُن کو ملانے والے خط کی مساوات۔

فرض کرو کہ ان دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویے $\text{فہ}_{۱}$ اور $\text{فہ}_{۲}$ ہیں
پس اِن نقطوں کے محدّد ا جم $\text{فہ}_{۱}$، ب جب $\text{فہ}_{۱}$ اور ا جم $\text{فہ}_{۲}$، ب جب $\text{فہ}_{۲}$ ہیں
اور اُن کو ملانے والے خط کی مساوات

$$\begin{vmatrix} \text{لا} & \text{ما} & ۱ \\ \text{ا جم فہ}_{۱} & \text{ا جب فہ}_{۱} & ۱ \\ \text{ا جم فہ}_{۲} & \text{ا جب فہ}_{۲} & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$ ہے۔

مقطعہ کو پھیلانے سے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}(\text{جب فہ}_{۱} - \text{جب فہ}_{۲}) + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}(\text{جم فہ}_{۲} - \text{جم فہ}_{۱}) - \text{جب}(\text{فہ}_{۱} - \text{فہ}_{۲}) = ۰$$

اس مساوات کو جب $\frac{۱}{۲}(\text{فہ}_{۱} - \text{فہ}_{۲})$ پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم}\,\frac{۱}{۲}(\text{فہ}_{۱} + \text{فہ}_{۲}) + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\frac{۱}{۲}(\text{فہ}_{۱} + \text{فہ}_{۲}) = \text{جم}\,\frac{۱}{۲}(\text{فہ}_{۱} - \text{فہ}_{۲}) \quad \ldots (۱)$$

یہی مطلوبہ مساوات ہے۔

$\text{فہ}_{۱}$ خارج مرکز زاویہ والے نقطہ پر کی مساوات کے لیے مساوات (۱) میں $\text{فہ}_{۲} = \text{فہ}_{۱}$ لکھو

تب $$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم فہ}_{۱} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب فہ}_{۱} = ۱ \quad \ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) سے واضح ہے اگر ناقص پر کے دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویوں کا حاصل جمع مستقل اور ۲ عہ کے مساوی ہو تو ان نقطوں کو ملانے والا وتر ہمیشہ خط $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\,\text{جم عہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب عہ} = ۱$ کے متوازی ہے۔ یعنی یہ وتر ہمیشہ خارج مرکزی زاویہ عہ والے نقطہ پر کے خطِ مماس کے متوازی ہے۔ اس کے بالعکس ناقص کے متوازی وتروں کے کسی نظام میں کسی بھی

وتر کے سروں پر کے خارج مرکزی زاویوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔

(ن) ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات اس نقطہ کے خارج مرکزی زاویہ کی رقموں میں۔

فرض کرو نقطہ ف کا خارج مرکزی زاویہ فہ ہے۔ اس نقطہ پر کے خطِ مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\ \text{جم فہ} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\ \text{جب فہ} = ۱$$

اس پر خط $\frac{\text{لا جب فہ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ما جم فہ}}{\text{ا}} + \text{ج} = ۰$ عمود ہوگا (جس میں ج ایک مستقل ہے) چونکہ یہ عمود نقطہ ف میں سے گزرتا ہے اس لیے مساوات میں لا اور ما کی قیمتیں (یعنی ا جم فہ اور ب جب فہ) درج کرنے سے

$$\frac{\text{ا جم فہ جب فہ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ب جب فہ جم فہ}}{\text{ا}} + \text{ج} = ۰$$

پس

$$\text{ج} = -\frac{(\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲)\ \text{جب فہ جم فہ}}{\text{اب}}$$

$$\therefore \frac{\text{لا جب فہ}}{\text{ب}} - \frac{\text{ما جم فہ}}{\text{ا}} - \frac{(\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲)}{\text{اب}}\ \text{جب فہ جم فہ} = ۰$$

یعنی

$$\text{الا جب فہ} - \text{ب ما جم فہ} - (\text{ا}^۲ - \text{ب}^۲)\ \text{جب فہ جم فہ} = ۰$$

لہذا

$$\frac{\text{الا}}{\text{جم فہ}} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب فہ}} = \text{ا}^۲ - \text{ب}^۲$$

(س) ناقص کے خارج مرکزی زاویوں فہ، فہ والے نقطوں پر کے خطوطِ مماس کے نقطۂ تقاطع کے محدد۔

فرض کرو کہ اس نقطہ کے محدد لا، ما ہیں۔ چونکہ فہ، فہ خارج مرکزی

زاویوں کے نقطوں کو ملانے والا وتر نقطہ، لا، ما، کا قطبی ہے لہذا اس کی مساوات

$$\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} - 1 = 0 \quad \text{ہے}$$

لیکن (م) کی مساوات (۱) یعنی $\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\,\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2) + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2) = \text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1-\text{فہ}_2)$ بھی اسی قطبی کی مساوات ہے۔

پس $\frac{\text{لا}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{جب فہ}_1 - \text{جب فہ}_2}{\text{جب}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2)}$ اور $\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{جم فہ}_1 - \text{جم فہ}_2}{\text{جب}(\text{ط}_1 - \text{ط}_2)}$

لہذا $\frac{\text{لا}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2)}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2)}$ اور $\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2)}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2)}$

[واضح ہے کہ فہ۱ خارج مرکزی زاویہ والے نقطہ کے خطِ مماس کی مساوات $\frac{\text{لا}}{\text{ل}}\,\text{جم فہ}_1 + \frac{\text{ما}}{\text{ب}}\,\text{جب فہ}_1 - 1 = 0$ میں لا، ما کے عوض لا۱، ما۱ لکھ کر اور اس طرح فہ۲ زاویہ والے نقطہ کے مماس کی مساوات میں بھی یہی عمل کرکے $\frac{\text{لا}_1}{\text{ل}}$ اور $\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}}$ کی قیمتیں اخذ کی جاسکتی ہیں ۔ طالب علم کو چاہیے بطور مشق اس کی تصدیق کرے]۔

فہ۱، فہ۲ خارج مرکزی زاویوں والے نقطوں پر کے عمادوں کے نقطۂ تقاطع کے محدد مساواتوں

$$\frac{\text{ل لا}}{\text{جم فہ}_1} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب فہ}_1} = \text{ل}^2 - \text{ب}^2 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ل لا}}{\text{جم فہ}_2} - \frac{\text{ب ما}}{\text{جب فہ}_2} = \text{ل}^2 - \text{ب}^2$$

کو لا اور ما کے لیے حل کرنے سے حسبِ ذیل برآمد ہوتے ہیں :۔

$$\text{لا} = \frac{\text{ل}^2 - \text{ب}^2}{\text{ل}}\,\text{جم فہ}_1\,\text{جم فہ}_2\,\frac{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2)}{\text{جم}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2)}$$

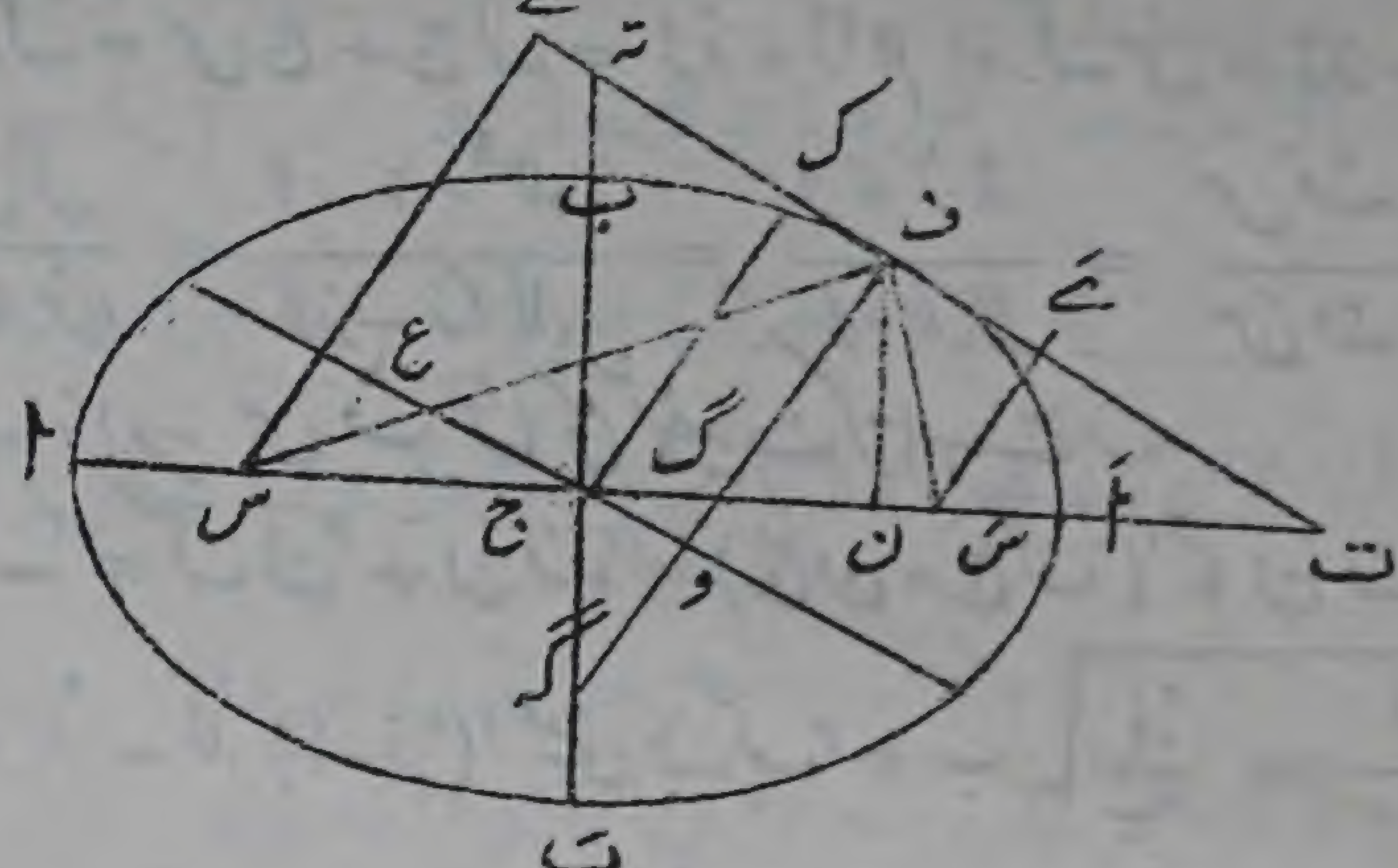
$$\text{ما} = \frac{\text{ب}^2 - \text{ل}^2}{\text{ب}}\,\text{جب فہ}_1\,\text{جب فہ}_2\,\frac{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 + \text{فہ}_2)}{\text{جب}\,\frac{1}{2}(\text{فہ}_1 - \text{فہ}_2)}$$

طالب علم کو چاہیے اس کی تصدیق کرے۔

اب ہم ناقص کے چند ہندسی خواص ثابت کرینگے۔

شکل ۳۲ میں، فرض کرو کہ نقطہ ف پر کا خطِ مماس لا اور ما کے محوروں سے

بالترتیب ت اور تہ پر ملتا ہے اور عماد ان محوروں سے گ اور گہ پر۔ س سے
سَ ےَ، ج کی نقطہ ف پر کے مماس پر عمود گراؤ۔ مرکز ج میں سے ج ع



شکل ۳۲

نقطۂ ف پر کے مماس کے متوازی کھینچو جو عماد ف گ گہ سے نقطۂ و پر ملے اور ماسکی فاصلہ س ف سے ع پر۔
تب اگر نقطہ ف کے محدّد لا، ما ہوں تو ف پر کے خطِ مماس کی مساوات

$$\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$ ہے

جس نقطہ پر یہ محور لا سے ملتا ہے وہاں ما = ۰۔ اور اس نقطہ کے لیے از روئے

مساوات (۱) $\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} = 1 \quad \therefore \quad \frac{\text{ج ن} \times \text{ج ت}}{\text{ج اَ}^2} = 1$

یعنی $\text{ج ن} \times \text{ج ت} = \text{ج اَ}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(ع)}$

اور اسی طرح $\text{ن ف} \times \text{ج تہ} = \text{ج ب}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(ب)}$

ف پر کے عماد کی مساوات $\frac{\text{لا} - \text{لا}_1}{\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}^2}} = \frac{\text{ما} - \text{ما}_1}{\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

جہاں عا د لا کے محور کو منقطع کرتا ہے وہاں ما = ۰ . پس از روئے مساوات (۲)

$لا - لا_۱ = - \frac{ب^۲}{ا^۲} لا_۱$ یعنی $لا = لا_۱ (۱ - \frac{ب^۲}{ا^۲}) = ز^۲ لا_۱$ ∴ $ج گ = ز^۲ × ج ن$ ..... (جہ)

نیز چونکہ $س گ = س ج + ج گ = ا ز + ز^۲ لا_۱$ اور $گ سَ = ا ز - ز^۲ لا_۱$

اس لیے $\frac{س گ}{گ سَ} = \frac{ا ز + ز^۲ لا_۱}{ا ز - ز^۲ لا_۱} = \frac{ا + ز لا_۱}{ا - ز لا_۱} = \frac{س ف}{سَ ف}$

پس ف گ زاویہ س ف سَ کی تنصیف کرتا ہے .... (ضہ)

چونکہ $ف گ^۲ = گ ن^۲ + ن ف^۲ = (ج ن - ج گ)^۲ + ن ف^۲$

پس $ف گ^۲ = ما_۱^۲ + لا_۱^۲ (۱ - ز^۲)^۲$ یعنی $ف گ^۲ = ب \sqrt{\frac{ما_۱^۲}{ب^۴} + \frac{لا_۱^۲}{ا^۴}}$

اسی طرح $ف گہ^۲ = ا^۲ \sqrt{\frac{لا_۱^۲}{ا^۴} + \frac{ما_۱^۲}{ب^۴}}$

اور $ف و = ک ج = \frac{۱}{\sqrt{\frac{لا_۱^۲}{ا^۴} + \frac{ما_۱^۲}{ب^۴}}}$

∴ $ف و × ف گ = ب^۲$ اور $ف و × ف گہ = ا^۲$ ...... (صہ)

خطِ مستقیم جس کی مساوات $ما = م لا + \sqrt{ا^۲ م^۲ + ب^۲}$ ...... (۳) ہے
ناقص کو مس کریگا م کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔

پس اگر س ے، سَ ےَ ماسکوں سے خط (۳) پر ڈالے ہوئے عمود ہوں تو

$س ے = \frac{- م ا ز + \sqrt{ا^۲ م^۲ + ب^۲}}{\sqrt{۱ + م^۲}}$ اور $سَ ےَ = \frac{م ا ز + \sqrt{ا^۲ م^۲ + ب^۲}}{\sqrt{۱ + م^۲}}$

∴ $س ے × سَ ےَ = \frac{ا^۲ م^۲ + ب^۲ - م^۲ ا^۲ ز^۲}{۱ + م^۲} = ب^۲$ ...... (ثہ)

س میں سے خط (۳) پر عمود وار گزرنے والے خط کی مساوات $م ما + لا + ا ز = ۰$ ...... (۴) ہے
(اس لیے کہ یہ مساوات م ما + لا + مستقل = ۰ ہے اور چونکہ س کے محدد - ا ز

اور صفر ہیں ۔ لہذا مستقل کی قیمت اُز ہے)

خطوط (۳) اور (۴) کے نقطۂ تقاطع ے کا طریق معلوم کرنے کے لیے ان دونوں مساواتوں میں سے م کو ساقط کرنا چاہیے ۔ یہ مساواتیں بشکل ذیل لکھی جاسکتی ہیں ۔

ما - م لا = √(اُ^{2} م^2 + ب^2) اور م ما + لا = - اُز

پس (ما - م لا)^2 = اُ^{2} م^2 + ب^2 اور (م ما + لا)^2 = اُ^{2} ز^2

ان دونوں مساواتوں کو جمع کرنے سے (ما^2 + لا^2)(۱ + م^2) = اُ^{2} م^2 + ب^2 + (اُ^{2} - ب^2)

= اُ^{2} (۱ + م^2)

یعنی (ما^2 + لا^2) = اُ^{2} پس ے کا طریق امدادی دائرہ ہے ...... (یہ)

اگر خط (۳) پر سَ سے عمود سَ ےَ گرایا جاتا تو ےَ کے لیے بھی یہی نتیجہ برآمد ہوتا ۔

(ع) فرض کرو ف کوئی سا ایک نقطہ ہے اور خط ق قَ جو لا اور ما کے محوروں سے ت اور تہ نقطوں پر ملتا ہے، ف کا قطبی ہے ۔ س سے سَ ے، سَ ےَ، ج ک اور ف ط خط ق قَ پر عمود وار کھینچو ۔ فرض کرو ف ط محوروں سے گ، گہ میں ملتا ہے ۔ تب اگر ف کے محدد لا۱، ما۱ ہوں تو ق قَ کی مساوات

(لا لا۱)/اُ^{2} + (ما ما۱)/ب^2 = ۱ .... (۱) ہوگی

اور اس لیے خط ف ط گ کی مساوات (لا - لا۱)/(لا۱/اُ^{2}) = (ما - ما۱)/(ما۱/ب^2) ......(۲) ہوگی

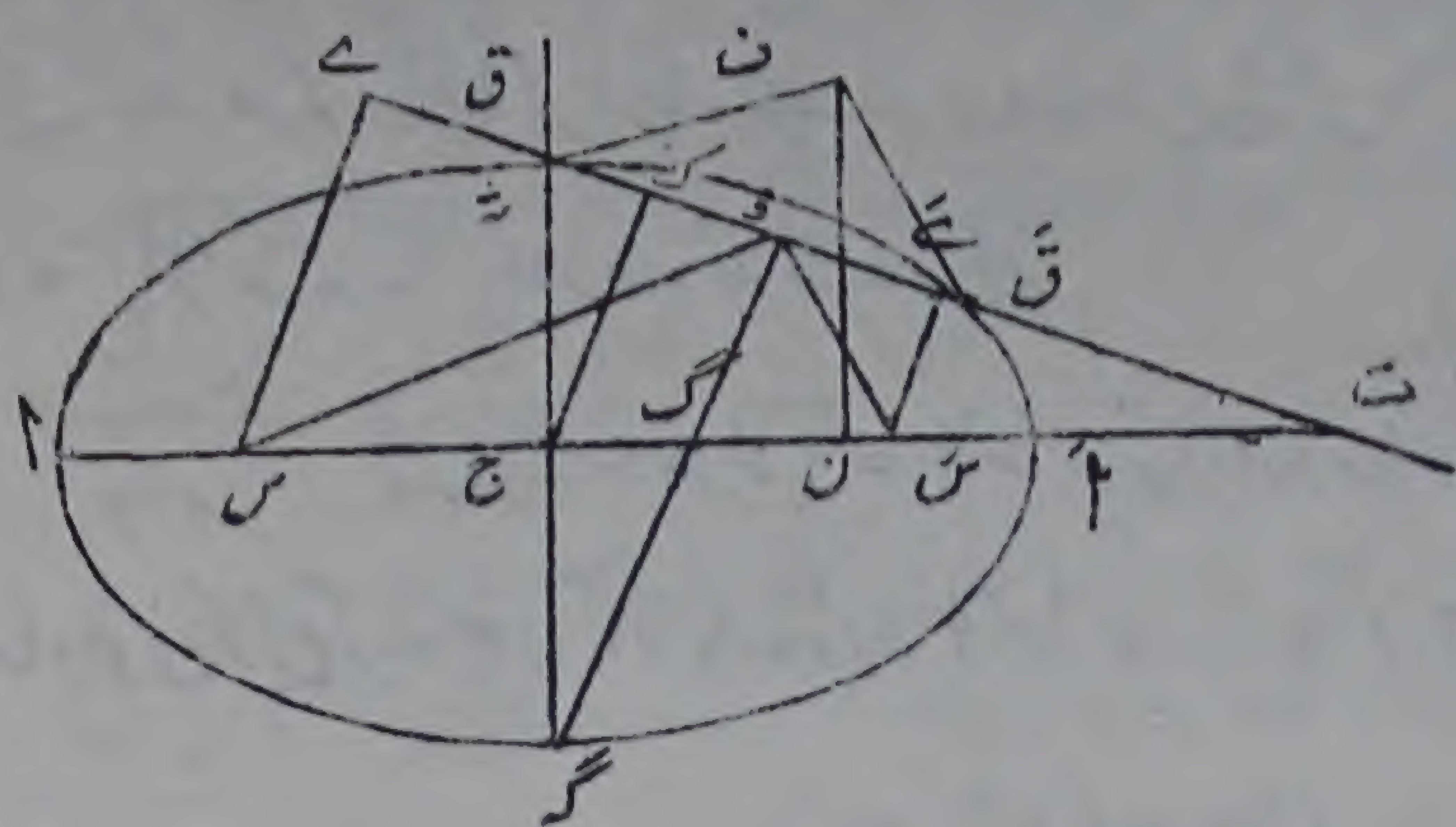
ان دونوں مساواتوں کے ذریعہ سابقہ فصل ۶۱ کے بعینہٖ ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

(ہ) ج ن × ج ت = ج اُ^{2}، (بہ) ن ف × ج تہ = ج ب^2

(جہ) ج گ = ز^2 ج ن اور (ضہ) ک ج × ف گ = ب^2

۶۲ (اُ) - ناقص کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے

وسطی نقطوں کا طریق۔



شکل ۳۳

فہ_1 اور فہ_2 خارج مرکزی زاویوں کے نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات

$$\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\ \text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2)+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\ \text{جب}\ \frac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2)=\text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{فہ}_1-\text{فہ}_2)$$ ہے۔

اگر یہ وتر خطِ مستقیم $\text{ما}-\text{م لا}=0$ کے متوازی ہے تو $\text{م}=-\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{مم}\ \frac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2)$ ..... (۱) ہے

لیکن اگر (لا، ما) وتر کا وسطی نقطہ ہے تو $2\ \text{لا}=\text{ا}(\text{جم فہ}_1+\text{جم فہ}_2)=2\ \text{ا}\ \text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2)\ \text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{فہ}_1-\text{فہ}_2)$

اور $2\ \text{ما}=\text{ب}(\text{جب فہ}_1+\text{جب فہ}_2)=2\ \text{ب}\ \text{جب}\ \frac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2)\ \text{جم}\ \frac{1}{2}(\text{فہ}_1-\text{فہ}_2)$

پس $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}=\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{مس}\ \frac{1}{2}(\text{فہ}_1+\text{فہ}_2)=-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2\ \text{م}}$ از روئے مساوات (۱)

لہٰذا خط $\text{ما}=\text{م لا}$ کے متوازی تمام وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جس کی مساوات

$$\text{ما}=-\frac{\text{ب}^2\ \text{لا}}{\text{ا}^2\ \text{م}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$ ہے

جس سے ظاہر ہے کہ ناقص کے تمام قطر اُس کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

مساوات (۲) کو اگر بشکلِ $\text{ما}=\text{م}'\ \text{لا}$ لکھیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ $\text{م}\ \text{م}'=-\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$ ..... (۳)

اس رابطہ کے تشاکل سے واضح ہے کہ تمام وتر جو خط $ما = م لا$ کے متوازی ہیں خط $ما = مَ لا$ ان کی تنصیف کرتا ہے۔

پس اگر ناقص کا ایک قطر کسی دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے تو یہ دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کریگا۔

تعریف۔ دو قطر **مزدوج** کہلاتے ہیں جبکہ ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

کسی قطر کے سرے پر کا خطِ مماس اس قطر سے تنصیف پانے والے وتروں کا متوازی ہوتا ہے۔

متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطے سب کے سب ناقص کے ایک قطر پر واقع ہوتے ہیں۔ اس قطر کے سروں پر کے متوازی خطوطِ مماس بھی اس متوازی وتروں کے نظام کے ارکان سمجھے جا سکتے ہیں۔ اس لیے کہ یہ فی الحقیقت وتر ہی ہیں جو دو منطبق نقطوں میں ناقص سے ملتے ہیں۔

مثال (۱)۔ ناقص کے ایک قطر پر کے کسی نقطہ کا قطبی مزدوج قطر کا متوازی ہے۔

اس لیے کہ $(لا_1، ما_1)$ میں سے گزرنے والا قطر $لا ما_1 - ما لا_1 = 0$ ہے

اور $(لا_1، ما_1)$ کا قطبی $\frac{لا لا_1}{ا^2} + \frac{ما ما_1}{ب^2} - 1 = 0$ ہے۔ یہ دونوں مساواتیں مزدوج قطروں کی شرط $م مَ = -\frac{ب^2}{ا^2}$ کو پورا کرتی ہیں اس لیے کہ $م = \frac{ما_1}{لا_1}$ اور $مَ = -\frac{ب^2 لا_1}{ا^2 ما_1}$

پس اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ اگر $(لا_1، ما_1)$ ناقص کے کسی وتر کا وسطی نقطہ ہے تو وہ وتر $(لا_1، ما_1)$ کے قطبی کا متوازی ہے۔

پس $(لا_1، ما_1)$ وسطی نقطہ والے وتر کی مساوات $\frac{(لا - لا_1) لا_1}{ا^2} + \frac{(ما - ما_1) ما_1}{ب^2} = 0$ ہے

مثال (۲)۔ اگر کسی ناقص کے وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں تو اُن کے وسطی نقطے ایک دوسرے ناقص پر ہونگے۔

کیونکہ ابھی ہم نے دیکھا ہے کہ (لا، ما) وسطی نقطہ والے وتر کی مساوات $\frac{(\text{لا}-\text{لا}_1)\text{لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{(\text{ما}-\text{ما}_1)\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = 0$ ہے۔

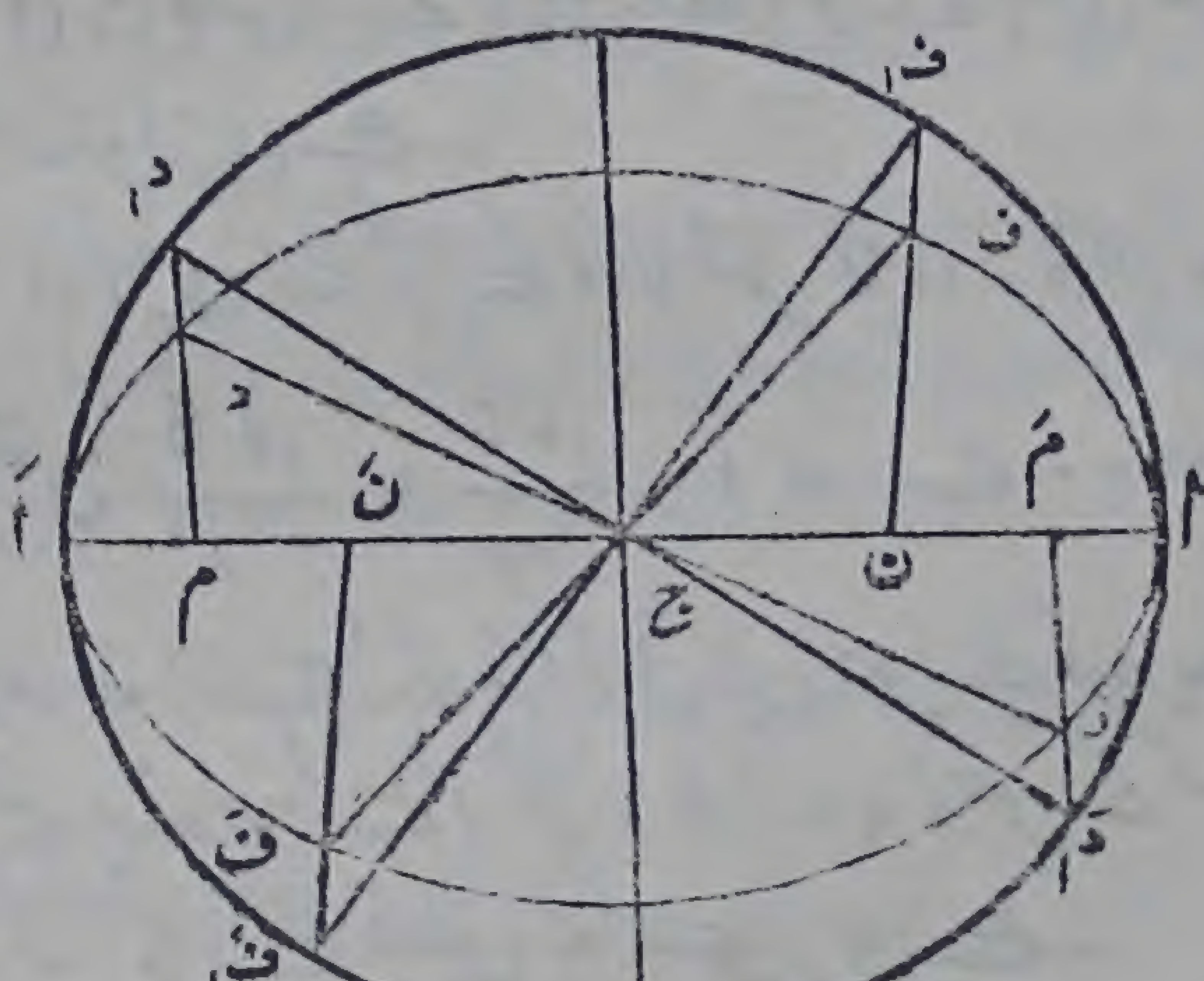
اگر یہ وتر دیے ہوئے نقطہ (ھ، ک) میں سے گزرتا ہے تو $\frac{(\text{ھ}-\text{لا}_1)\text{لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{(\text{ک}-\text{ما}_1)\text{ما}_1}{\text{ب}^2} = 0$

لہٰذا نقطہ (لا_1، ما_1) ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} - \frac{\text{ھ لا}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ک ما}}{\text{ب}^2} = 0$ پر واقع ہے۔

(ب) شکل ۳۴ میں فرض کرو ف، د ایک جوڑ مزدوج قطروں کے سرے ہیں۔ فرض کرو ف کے محدد لا_1، ما_1 ہیں اور د کے محدد لا_2، ما_2 ج ف اور ج د کی مساواتیں $\frac{\text{ما}}{\text{ما}_1} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}_1}$ اور $\frac{\text{ما}}{\text{ما}_2} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}_2}$ ہیں۔

پس (ا) کی مساوات (۳) کی رُو سے $\frac{\text{ما}_1\,\text{ما}_2}{\text{لا}_1\,\text{لا}_2} = -\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$

$$\therefore \quad \frac{\text{لا}_1\,\text{لا}_2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1\,\text{ما}_2}{\text{ب}^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$



شکل ۳۴

اگر فہ_1، فہ_2 بالترتیب ف اور د کے خارج مرکزی زاویے ہوں تو $\text{لا}_1 = \text{ا جم فہ}_1$، $\text{ما}_1 = \text{ب جم فہ}_1$ اور $\text{لا}_2 = \text{ا جم فہ}_2$ اور $\text{ما}_2 = \text{ب جب فہ}_2$

ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں درج کرنے سے جم فہ۱ جم فہ۲ + جب فہ۱ جب فہ۲ = ۰

یعنی مس فہ۱ = ۔حم فہ۲ ∴ $\frac{\pi}{2}$ ۔ فہ۱ = ۔ فہ۲ پس فہ۱ ~ فہ۲ = $\frac{\pi}{2}$

لہٰذا ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں پر کے دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویوں کا تفاوت ایک زاویہ قائمہ ہے۔

اگر ف ج ف‌۱، د ج د‌۱ ناقص کے قطروں ف ج فَ، د ج دَ کے متناظر امدادی دائرے کے قطر ہیں تو ف ج ف‌۱ اور د ج د‌۱ باہمدیگر علی القوائم ہونگے۔ اس لیے د اور دَ کے محدّد فوراً ف اور فَ کے محدّدوں کی قیموں میں ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔

(ج) دو مزدوج نصف قطروں کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل اور ا۲ + ب۲ کے مساوی ہے۔

فرض کرو ف اور د ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں پر کے نقطے ہیں۔ اگر ف کا خارج مرکزی زاویہ فہ مانا جائے تو د کا خارج مرکزی زاویہ فہ $\pm\frac{\pi}{2}$ ہوگا۔

ف کے محدّد ا جم فہ، ب جب فہ ہونگے اور د کے محدّد ا جم (فہ $\pm\frac{\pi}{2}$)، ب جب (فہ $\pm\frac{\pi}{2}$)

∴ ج ف۲ = ا۲ جم۲ فہ + ب۲ جب۲ فہ

اور ج د۲ = ا۲ جم۲ (فہ $\pm\frac{\pi}{2}$) + ب۲ جب۲ (فہ $\pm\frac{\pi}{2}$)

∴ ج ف۲ + ج د۲ = ا۲ + ب۲

(د) ناقص کے مزدوج قطروں کے سروں پر مس کرنے والے متوازی الاضلاع کا رقبہ مستقل اور ۴ ا ب کے مساوی ہے۔

فرض کرو ج فَ، د ج دَ ناقص کے مزدوج قطر ہیں جو متوازی الاضلاع ناقص کو ف، فَ، د، دَ پر مس کرتا ہے اس کا رقبہ ۴ ج ف × ج د جب ف ج د یا ۴ ج د × ج ک ہے جس میں ج ک مرکز ج سے ف پر کے خطِ مماس پر گرایا ہوا عمود ہے (دیکھو شکل نمبر ۳۲)۔

اگر ف کا خارج مرکزی زاویہ فہ ہو تو د کا خارج مرکزی زاویہ فہ $\pm \frac{\pi}{2}$ ہوگا۔

$\therefore$ ج $د^2$ = $ا^2$ $جم^2$ (فہ $\pm \frac{\pi}{2}$) + $ب^2$ $جب^2$ (فہ $\pm \frac{\pi}{2}$)

یعنی ج $د^2$ = $ا^2$ $جب^2$ فہ + $ب^2$ $جم^2$ فہ .... (۱)

اور ف پر کے خطِ مماس کی مساوات $\frac{لا}{ا}$ جم فہ + $\frac{یا}{ب}$ جب فہ = ۱

$\therefore$ ج $ک^2$ = $\frac{۱}{\frac{جم^2 فہ}{ا^2} + \frac{جب^2 فہ}{ب^2}}$ = $\frac{ا^2 ب^2}{ا^2 جب^2 فہ + ب^2 جم^2 فہ}$ ...... (۲)

پس (۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ ج د × ج ک = ا ب لہذا ناقص کے مزدوج قطروں کے سروں پر تماس رکھنے والے متوازی الاضلاع کا رقبہ ۴ ا ب کے مساوی ہے۔

(ہ) اگر ناقص کے دو مزدوج قطروں ج ف، ج د کے طول بالترتیب ل، $ل_۱$ ہوں تو چونکہ ج ک = ج ف جب < ج ف ک = ل جب طہ جس میں طہ = زاویہ ف ج د (یعنی مزدوج قطروں کا درمیانی زاویہ) اس لیے ل $ل_۱$ جب طہ = ا ب جس سے ظاہر ہے کہ جب طہ اقل ہے جبکہ ل $ل_۱$ اعظم ہے۔

لیکن دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل (= $ا^2$ + $ب^2$) ہے۔ لہذا ل $ل_۱$ کی قیمت اعظم ہوگی جبکہ یہ قطر ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔ بدیں وجہ ناقص کے دو مزدوج قطروں کا درمیانی زاویہ حادہ اقل ہوتا ہے جبکہ یہ مزدوج قطر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

(و) فرض کرو ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں ف، د کے خارج مرکزی زاویے بالترتیب فہ اور فہ $\pm \frac{\pi}{2}$ ہیں۔

تب ج $ف^2$ = $ا^2$ $جم^2$ فہ + $ب^2$ $جب^2$ فہ اور ج $د^2$ = $ا^2$ $جب^2$ فہ + $ب^2$ $جم^2$ فہ

$\therefore$ ج $ف^2$ − ج $د^2$ = ($ا^2$ − $ب^2$) جم ۲ فہ

پس ج ف = ج د جبکہ فہ $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{3\pi}{4}$ اس لیے مساوی مزدوج قطروں کی

مساواتیں $\frac{لا}{ا} = \pm \frac{ما}{ب}$ ہیں (کیونکہ جم $\frac{\pi}{4}$ = جب $\frac{\pi}{4}$)

پس ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کی سمتیں اور اس کے محوروں کے سروں پر کے مماسوں سے بنے ہوئے مستطیل کے وتروں کی سمتیں باہمدیگر منطبق ہیں۔

(ز) تعریف۔ ناقص پر کے کسی نقطہ سے اس کے کسی قطر کے سروں کو ملانے والے دو خطوطِ مستقیم تکمیلی اوتار کہلاتے ہیں۔

ناقص کے کوئی سے دو تکمیلی وتر ایک جوڑ مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں۔

ناقص پر کوئی نقطہ ق فرض کرو اور اس کو قطر ف ج فَ کے سروں ف اور فَ سے ملاؤ۔ اگر و اور وَ بالترتیب ق ف اور ق فَ کے وسطی نقطے ہیں تو ج وَ اور ج و مزدوج ہیں اس لیے کہ یہ ایک دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتے ہیں اور ج وَ اور ج و بالترتیب ق ف اور ق فَ کے متوازی ہیں۔

پس ق ف اور ق فَ ایک جوڑ مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

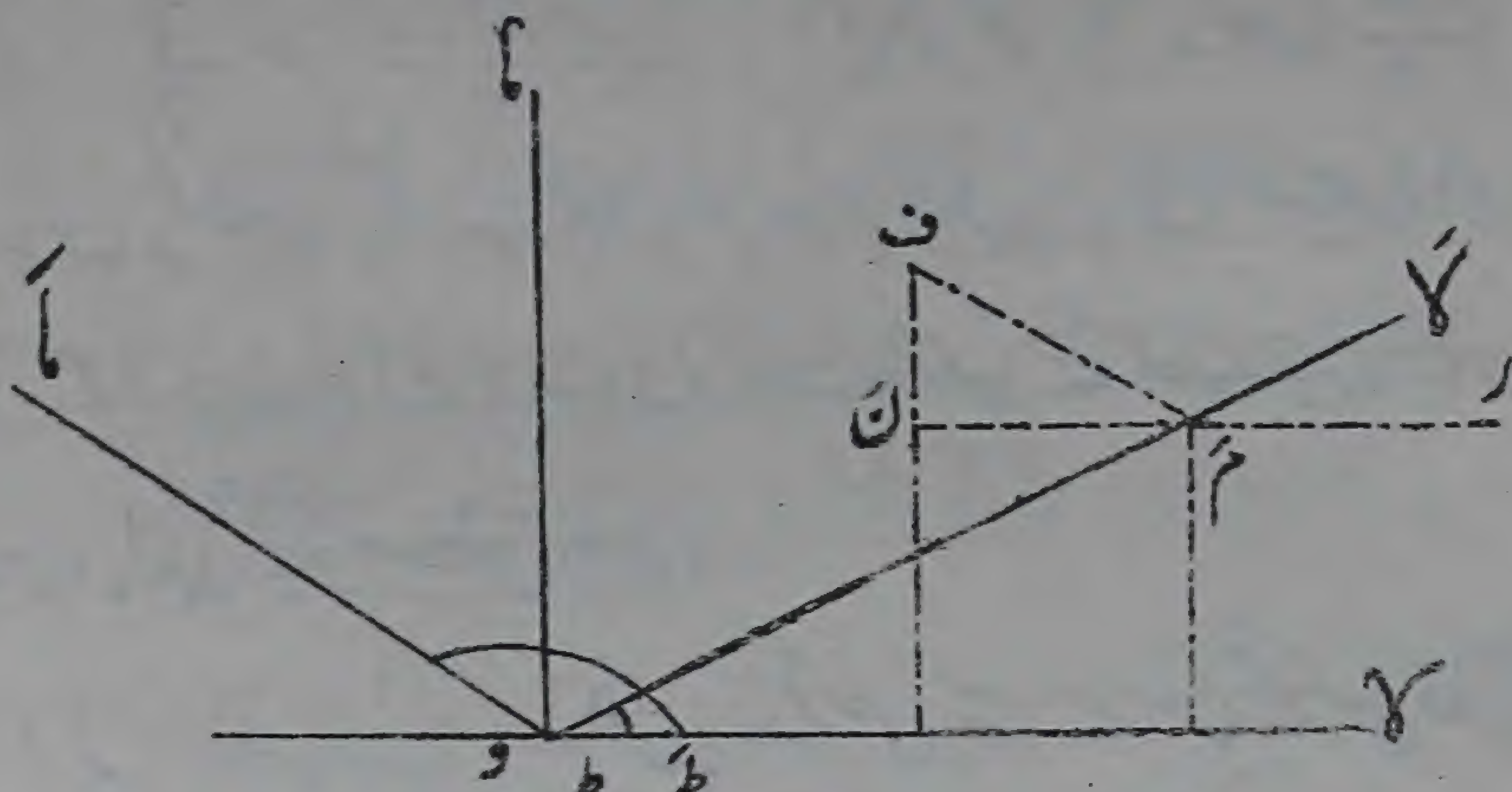
۳۴۔ ایک جوڑ مزدوج قطروں کو محور مان کر بآسانی ناقص کی مساوات حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس کے لیے ہمیں علی القوائم محور والے محدّدوں کو دیے ہوئے دوسرے محور والے محدّدوں کی رقموں میں ظاہر کرنے کی ضرورت ہے۔

(ا) فرض کرو شکل ع۳۵ میں و لا، و ما علی القوائم محور ہیں اور و لاَ اور و ماَ جدید محور ہیں جن کا درمیانی زاویہ سہ ہے۔

اگر لا و لاَ = طہ اور لا و ماَ = طہَ تو سہ = طہَ − طہ ہے۔

کسی نقطہ ف کے محدّد اول الذکر محوروں کے حوالہ سے لا، ما فرض کرو اور آخر الذکر کے حوالہ سے لاَ اور ماَ۔

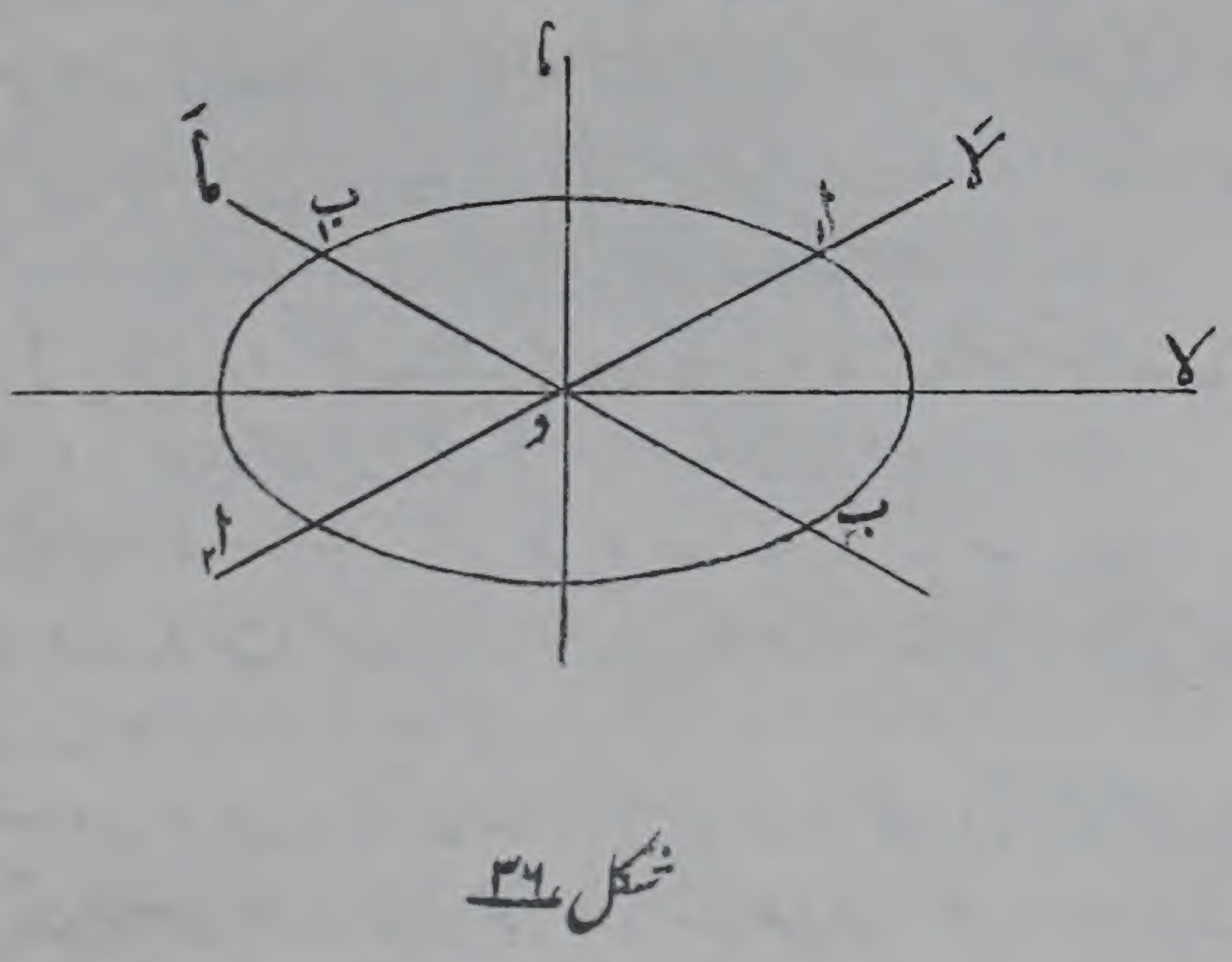
خط ف م محور و ما کے متوازی کھینچو ف مَ محور و ماَ کے متوازی مَ ن محور و ما کے متوازی اور ر مَ نَ محور و لا کے متوازی۔ تب ∠ ر مَ ف = طہَ



شکل ۳۵

چونکہ وم = ون + ن م = ون + مَ نَ = ومَ جم ط + مَ فَ جم طَ
اور م ف = م نَ + نَ ف = ن مَ + نَ ف = ومَ جب ط + مَ فَ جب طَ
لہذا لا = لاَ جم ط + ماَ جم طَ اور ما = لاَ جب ط + ماَ جب طَ

(ب) فرض کرو شکل ۳۶ میں ا۱ ا۲ اور ب۱ ب۲ ناقص کے مزدوج قطر ہیں اور یہ محور مانے جاتے ہیں۔



شکل ۳۶

و لا' و ما' کے حوالہ سے ناقص کی مساوات $\frac{\text{لا}'^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}'^2}{\text{ب}^2}=1 \ldots\ldots (1)$ ہے

$\angle\, \text{لا و لا}' = \text{ط}$ اور $\angle\, \text{ما}' \text{ و لا} = \text{ط}'$

پس $\text{لا} = \text{لا}' \text{جم ط} + \text{ما}' \text{جم ط}'$ اور $\text{ما} = \text{لا}' \text{جب ط} + \text{ما}' \text{جب ط}' \ldots\ldots (2)$

۶۲ ۔ (ا) کی مساوات (۳) سے $\text{مس ط مس ط}' = -\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$

یعنی $\frac{\text{جم ط جم ط}'}{\text{ا}^2}+\frac{\text{جب ط جب ط}'}{\text{ب}^2}=0 \ldots\ldots (3)$

مساوات (۱) میں لا اور ما کی نئی قیمتیں درج کرکے ترتیب دینے سے

$$\left(\frac{\text{جم}^2\text{ط}}{\text{ا}^2}+\frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{ب}^2}\right)\text{لا}'^2+2\left(\frac{\text{جم ط جم ط}'}{\text{ا}^2}+\frac{\text{جب ط جب ط}'}{\text{ب}^2}\right)\text{لا}'\text{ما}'+\left(\frac{\text{جم}^2\text{ط}'}{\text{ا}^2}+\frac{\text{جب}^2\text{ط}'}{\text{ب}^2}\right)\text{ما}'^2=1$$

(۳) کی رو سے لا' ما' کا سر صفر ہے پس $\left(\frac{\text{جم}^2\text{ط}}{\text{ا}^2}+\frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{ب}^2}\right)\text{لا}'^2+\left(\frac{\text{جم}^2\text{ط}'}{\text{ا}^2}+\frac{\text{جب}^2\text{ط}'}{\text{ب}^2}\right)\text{ما}'^2=1$

اس مساوات میں ما' کو صفر لکھنے سے نصف قطر و ا کی قیمت $\frac{1}{\frac{\text{جم}^2\text{ط}}{\text{ا}^2}+\frac{\text{جب}^2\text{ط}}{\text{ب}^2}}$ برآمد ہوتی ہے۔ جس کو ہم ا' سے تعبیر کرینگے۔ اسی طرح لا' کو صفر لکھنے سے و ب کی قیمت $\frac{1}{\frac{\text{جم}^2\text{ط}'}{\text{ا}^2}+\frac{\text{جب}^2\text{ط}'}{\text{ب}^2}}$ ہوتی ہے۔ اگر اس کو ب' سے تعبیر کریں تو ناقص کی مساوات مزدوج قطروں کے حوالہ سے

$$\frac{\text{لا}'^2}{\text{ا}'^2}+\frac{\text{ما}'^2}{\text{ب}'^2}=1 \text{ ہے}$$

پس $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}'^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}'^2}=1$ ناقص کی مساوات ہے جب کہ نصف طول ا' اور ب' والے مزدوج قطر کے حوالہ کے محور مانے جاتے ہیں۔

مثال (۱)۔ ناقص کے محورِ اعظم کے سروں پر کے خطوط مماس ناقص کے کوئی سے خط مماس سے ت اور ت' نقطوں پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر ت ت' ہے ماسکوں میں سے گزریگا۔

فرض کرو ناقص کے کسی نقطہ کے محدد لا' ، ما' ہیں اِس نقطہ پر کے خطِ مماس کی

مساوات $\frac{لالاَ}{و^2} + \frac{ما ماَ}{ب^2} - 1 = 0$ ہے یہ خطِ مماس خط لا = و سے جس مقام پر ملتاہے وہاں ما = $\frac{ب^2}{ماَ}(1 - \frac{لاَ}{و})$ اور خط لا = -و سے جس مقام پر ملتاہے

وہاں ما = $\frac{ب^2}{ماَ}(1 + \frac{لاَ}{و})$ ہے۔

پس دائرہ جس کا قطر ت تَ ہے (لا - و)(لا + و) + $\{$ما - $\frac{ب^2}{ماَ}(1 - \frac{لاَ}{و})\}\{$ما - $\frac{ب^2}{ماَ}(1 + \frac{لاَ}{و})\}$ = ۰ ہے

جو خط ما = ۰ کو ایسی جگہ قطع کرتا ہے جہاں $لا^2 - و^2 + \frac{ب^4}{ماَ^2}(1 - \frac{لاَ^2}{و^2}) = 0$ ہے۔

چونکہ $\frac{لاَ^2}{و^2} + \frac{ماَ^2}{ب^2} = 1$ اس لیے یہ مقام تقاطع $لا^2 - و^2 + ب^2 = 0$ رہیں یعنی ماسکے ہیں۔

مثال (۲) اگر ناقص کوئی سا مزدوج قطروں کا جوڑ نقطہ ف پر کے خط مماس کو ت اور تَ نقطوں میں قطع کرے تو ثابت کرو کہ ت ف × ف تَ = ج $د^2$ جس میں ج د قطر ج ف کا مزدوج ہے۔ ج ف، ج د کو لا اور ما کے محور قرار دو،

تب ناقص کی مساوات $\frac{لا^2}{و^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ ہوگی۔

ف یعنی نقطہ (و، ۰) پر کے خط مماس کی مساوات لا = و ہے۔

اگر ما = م لا، ما = مَ لا مزدوج قطروں کے کسی جوڑ کی مساواتیں ہوں تو م مَ = $-\frac{ب^2}{و^2}$ لیکن ف ت = م و اور ف تَ = مَ و ∴ ف ت × ف تَ = م مَ $و^2$

∴ ت ف × ف تَ = $ب^2$

مثال (۳) ثابت کرو کہ اگر کسی ناقص پر کے دو نقطوں $ف_1$، $ف_2$ سے اُس کے محور اعظم و وَ پر عماد $ف_1 ن_1$ اور $ف_2 ن_2$ گرائے جائیں تو

$$\frac{ن_1 ف_1^2}{ن_2 ف_2^2} = \frac{اَن_1 \times ن_1 ا}{اَن_2 \times ن_2 ا}$$

فرض کرو ف_1 کے محدد $(\text{لا}_1 ، \text{ما}_1)$ ہیں اور ف_2 کے محدد $(\text{لا}_2 ، \text{ما}_2)$ ۔

تب $\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} = 1$ اور $\frac{\text{لا}_2^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}_2^2}{\text{ب}^2} = 1$

پس $\frac{\text{ما}_1^2}{\text{ما}_2^2} = \frac{\text{ا}^2 - \text{لا}_1^2}{\text{ا}^2 - \text{لا}_2^2} = \frac{(\text{ا} + \text{لا}_1)(\text{ا} - \text{لا}_1)}{(\text{ا} + \text{لا}_2)(\text{ا} - \text{لا}_2)}$

لیکن $\text{ما}_1 = \text{ن}_1\text{ف}_1$ ، $\text{ا} + \text{لا}_1 = \text{اَج} + \text{ج ن}_1 = \text{اَن}_1$ جس میں ج ناقص کا مرکز ہے
$\text{ا} - \text{لا}_1 = \text{ج ا} - \text{ج ن}_1 = \text{ن}_1\text{ا}$ ، $\text{ما}_2 = \text{ن}_2\text{ف}_2$ ، $\text{ا} + \text{لا}_2 = \text{اَن}_2$ اور $\text{ا} - \text{لا}_2 = \text{ن}_2\text{ا}$

پس $\frac{\text{ما}_1^2}{\text{ما}_2^2} = \frac{\text{اَن}_1 \times \text{ن}_1\text{ا}}{\text{اَن}_2 \times \text{ن}_2\text{ا}}$

نویں باب کی مثالیں

(۱) اگر کسی ناقص کے مرکزہ پر کا عماد محور اعظم کا چوتھائی طول رکھتا ہے تو ناقص کی مساوات اور اس کا خروج مرکز دریافت کرو۔

(۲) $2\,\text{لا}^2 + 3\,\text{ما}^2 = 1$ دیا جاتا ہے اس کے نصف محور ماسکے اور مرتب دریافت کرو۔

(۳) ثابت کرو کہ ناقص میں (ا) محور اقل کا نصف اس اور س اَ کا ایک اوسط متناسب ہے۔ (ب) ماسکہ پر کا عماد ۲ اس اور ۲ اسَ کا ایک موسیقی اوسط ہے۔ (۲ ا اَ ناقص کا محور اعظم ہے اور س، سَ اس کے ماسکے ہیں)۔

(۴) ثابت کرو کہ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}$ کے ایسے خطوطِ مماس کی مساواتیں جو محوروں پر مساوی مقطوعے بناتی ہیں۔
$\text{لا} \pm \text{ما} \pm \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} = 0$ ہیں۔

(۵) اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ف کے ماسکی فاصلے س ف ، سَ ف ہوں ،

ج ناقص کا مرکز ہو اور ج د قطر ج ف کا مزدوج ہو تو بتاؤ کہ س ف × سَ ف = ج د^2

(۶) ناقص کا محورِ اعظم ا ج اَ ہے۔ ناقص پر کے کسی نقطہ ف پر کا خط مماس نقطہ ا پر کے خط مماس سے نقطہ ی پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ ج ی خط اَ ف کا متوازی ہے۔

(۷) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو متقاطع خطوطِ مستقیم سے اس کے فاصلوں کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک ناقص ہے۔ اور بتاؤ کہ اِن خطوط کے درمیانی زاویہ کی رقموں میں ناقص کا خروج مرکز کیا ہے۔

(۸) ف، قَ ناقص پر دو ثابت نقطے ہیں اور ~~ح~~ اس پر کا کوئی ایک اور نقطہ ہے۔ و وَ خطوط ف ر، ق ر کے وسطی نقطے ہیں اور وگ، وَگَ بالترتیب ف ر، ق ر پر عمود ہیں اور محور سے گ، گَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ گ گَ مستقل ہے۔

(۹) ایک دیے ہوئے ماسکہ اور اُس کے متناظر مرتب کے ناقصوں کا ایک سلسلہ کھینچا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اُن کے اقل محوروں کے سروں کا طریق ایک مکافی ہے۔

(۱۰) ف ن فَ ایک ناقص کا دوہرا معین ہے اور ق منحنی پر کوئی سا ایک نقطہ ہے۔ اگر ق ف، ق فَ محورِ اعظم سے علی الترتیب م، مَ نقطوں میں ملے تو ج م × ج مَ = ج ا^2

(۱۱) ناقص کے ماسکوں میں سے گزرتے ہوئے مزدوج قطروں کے ایک جوڑ کے بالترتیب علی القوائم خطوط کھینچے جاتے ہیں جو نقطہ ق پر متقاطع ہوتے ہیں ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ہم مرکز ناقص ہے۔

(۱۲) اگر ف، د مزدوج قطروں کے سرے ہیں اور نقطہ ف پر کا خط مماس محورِ اعظم کو نقطہ ت میں منقطع کرتا ہے اور نقطہ د پر کا مماس محور اقل کو تَ میں منقطع کرتا ہے تو بتاؤ کہ ت تَ مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک قطر کے متوازی ہوگا۔

(۱۳) ثابت کرو کہ ناقص پر کے کسی نقطہ کا عماد خطِ مماس پر مرکز اور دونوں ماسکوں پر سے ڈالے ہوئے عمودوں کا چوتھا متناسب ہے۔

(۱۴) ف ن فَ ناقص کا ایک دوہرا معین ہے اور ف پر کا عماد

ج ف ے نقطہ و پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ د کا طریق ایک ناقص ہے۔

(۱۵) اگر ناقص کے کسی نقطہ ف پر کا عماد محورِ اعظم کو نقطہ گ پر قطع کرے تو بتاؤ کہ ف کی مختلف وضعوں کے لیے ف گ کے وسطی نقطہ کا طریق ایک ناقص ہوگا۔

(۱۶) ناقص کے کوئی سے دو قطروں کے دو سروں کو ملانے والا خط، ان کے مزدوج قطروں کے دو سروں کو ملانے والے خط کا یا متوازی ہے یا مزدوج۔

(۱۷) اگر ناقص کے تین نقطوں پر جن کے خارج مرکزی زاویے فہ، فہ، فہ ہیں خطوطِ مماس کھینچے جائیں تو ان خطوط سے جو مثلث بنیگا اُس کے بیرونی دائرہ کا قطر

$$\frac{ط_1 ط_2 ط_3}{4\ ا ب}\ \text{قط}\ \frac{فہ_2 - فہ_3}{2}\ \text{قط}\ \frac{فہ_3 - فہ_1}{2}\ \text{قط}\ \frac{فہ_1 - فہ_2}{2}\ \text{ہے}$$

جس میں $ط_1$، $ط_2$، $ط_3$ ناقص کے اُن قطروں کا طول ہے جو مثلث کے ضلعوں کے متوازی ہیں اور ا، ب ناقص کے نصف محور ہیں۔

(۱۸) اگر ف، ق ناقص کے باہمدیگر علی القوائم خطوطِ مماس کے نقاطِ تماس ہیں اور فَ، قَ امدادی دائرہ پر کے متناظر نقطے ہیں تو ثابت کرو کہ ج فَ، ج قَ ناقص کے مزدوج قطر ہیں۔

(۱۹) دو مساوی دائرے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اس نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کی حرکت میں اُس سے اُن دائروں تک کھینچے ہوئے خطوطِ مماس کے طولوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔

(۲۰) ناقص پر دو علی القوائم خطوطِ مماس کھینچے جاتے ہیں۔ وترِ تماس کے وسطی نقطہ کا طریق دریافت کرو۔

(۲۱) ناقص کے مستقل طول کے تمام وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق معلوم کرو۔

(۲۲) ناقص کے کوئی سے دو قطروں کے سروں پر کے خطوطِ مماس سے پیدا ہونے والے متوازی الاضلاع کا رقبہ، نقاطِ تماس کو ملانے سے تیار ہونے والے متوازی الاضلاع کے رقبہ کے بالعکس بدلتا ہے۔

(۲۳) اگر ناقص کے کسی ماسکی وتر کے سروں سے عماد کھینچے جائیں تو ان کے نقطۂ تقاطع میں سے محورِ اعظم کے متوازی کھینچا ہوا خط اِس وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

دسواں باب

خطِ زائد کی مساواتیں

۶۳۔ تعریف ـــــ جب کوئی نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے (جو ماسکہ کہلاتا ہے)، ایک ثابت خطِ مستقیم کے فاصلہ کے ساتھ (جو کہ مرتّب کہلاتا ہے) اکائی سے زائد مستقل نسبت رکھتا ہے تو اِس نقطہ کا طریق خطِ زائد ہے۔

(ا) خطِ زائد کی مساوات ـــــ فرض کرو کہ شکل ۳۷ میں س ماسکہ اور ی م مرتّب ہے۔ س ی مرتب پر عمود کھینچو۔ ی س کو نقطہ ا پر اس طرح تقسیم کرو کہ س ا / ا ی = ز / ۱ جس میں ز ایک سے زائد عدد ہے۔ تب ا منحنی پر کا ایک نقطہ ہوگا۔

س ی کو آگے بڑھانے سے ایک دوسرا نقطہ اَ ایسا ہاتھ آئیگا جس کے لیے س اَ / ی اَ = ز / ۱، ج کو ا اَ کا وسطی نقطہ مانو اور طول ا اَ کو ۲ ل

تب س ا = ز × ا ی اور س اَ = ز × ی اَ

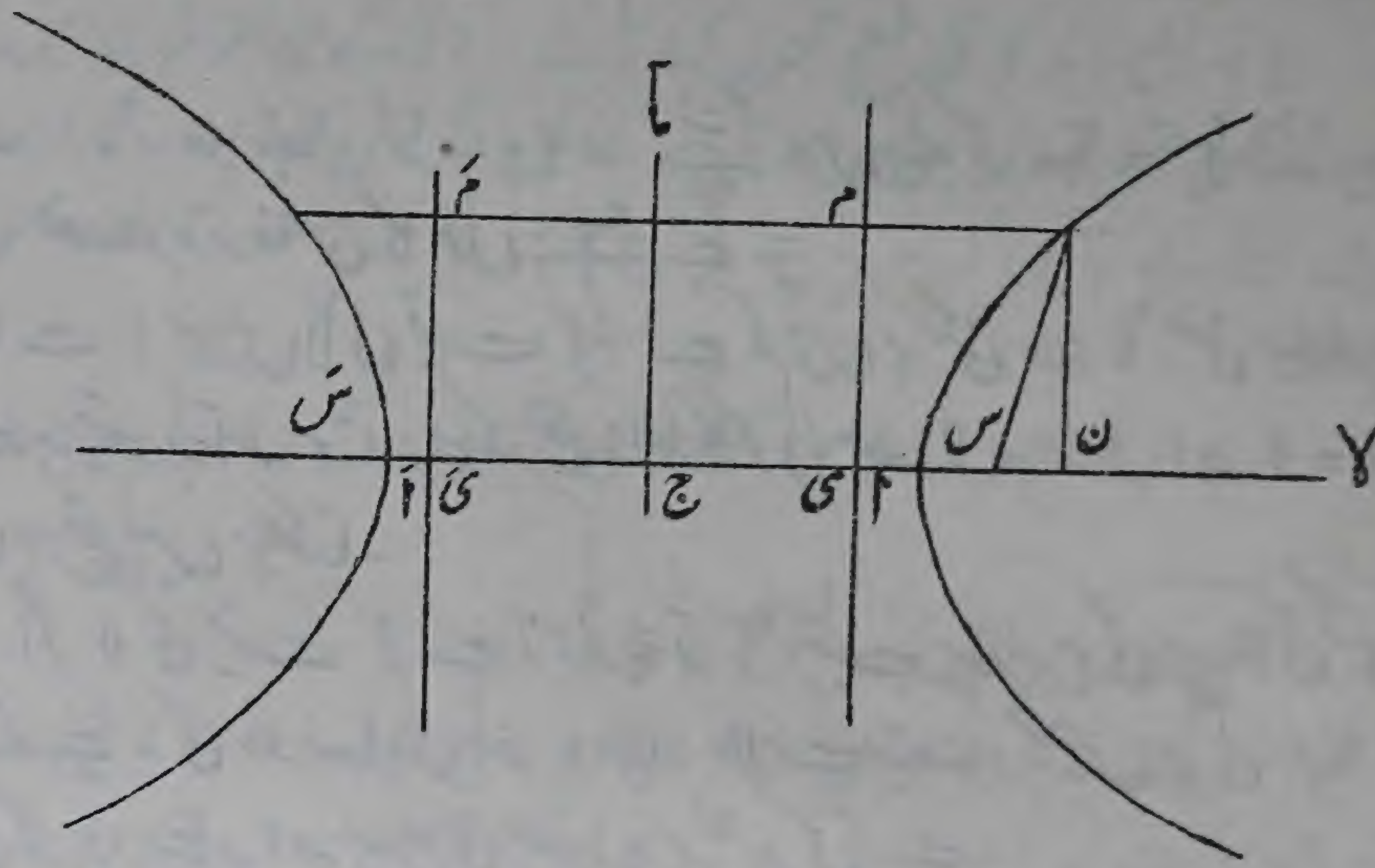
∴ س ا + س اَ = ز (ا ی + ی اَ)

پس ۲ س ج = ۲ ز × ا ج ∴ ج س = ز × ل .... (۱)

نیز س اَ - س ا = ز (ی اَ - ا ی)

یعنی ا اَ = ز (ا اَ - ۲ ا ی)

∴ اج = ز × ی ج یعنی ج ی = $\frac{\text{ا}}{\text{ز}}$ .... (۲)



شکل ۳۷

ج کو مبداء فرض کرو، ج ا کو لا کا محور مانو اور ج ما کو ج ا اَ پر علی القوائم ہے ما کا محور۔ فرض کرو ف منحنی پر کا کوئی سا نقطہ ہے اور اس کے محدد لا، ما ہیں

تب س ف² = ز² × ف م² یعنی س ن² + ن ف² = ز² × ی ن²

لیکن س ن = ج ن − ج س = لا − ا × ز

اور ی ن = ج ن − ج ی = لا − $\frac{\text{ا}}{\text{ز}}$

∴ (لا − ا × ز)² + ما² = ز² (لا − $\frac{\text{ا}}{\text{ز}}$)²

یعنی ما² + لا² (۱ − ز²) = ا² (۱ − ز²)، لہٰذا $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ا}^2(1-\text{ز}^2)} = 1$ .... (۳)

چونکہ ز کی قیمت اکائی سے زیادہ ہے اس لیے ا² (۱ − ز²) منفی ہے۔
پس اگر ا² (۱ − ز²) کے عوض − ب² لکھا جائے تو منحنی کی مساوات

$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ .... (۴) ہو جاتی ہے۔

قطع زائد کے **وتر خاص** سے مراد وہ وتر ہے جو اس کے ماسکہ میں سے مرتب کے

متوازی کھینچی جائے ۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے مساوات (۴) میں لا = ل × ز لکھو ۔

تب $\text{ما}^2 = \text{ب}^2(\text{ز}^2 - 1) = \frac{\text{ب}^4}{\text{ل}^2}$ اس لیے کہ $\text{ب}^2 = \text{ل}^2(\text{ز}^2 - 1)$

پس نصف وتر خاص کا طول $\frac{\text{ب}^2}{\text{ل}}$ ہے ۔

مساوات (۴) میں لا^2 کی قیمت ل^2 سے کم نہیں ہو سکتی ورنہ ما^2 منفی مقدار ہوگی۔ جس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ قطع زائد کا کوئی حصہ لا = − ل اور لا = ل کے درمیان واقع نہیں ہو سکتا ۔

اگر لا کی قیمت ل سے زائد ہو تو ما^2 مثبت مقدار ہوگی اور لا کی کسی خاص قیمت کے لیے ما کی دو مساوی اور باعتبار علامت متضاد قیمتیں ہونگی۔ لہٰذا لا کا محور منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصّوں پر تقسیم کرتا ہے ۔

ما کی کسی بھی قیمت کے لیے لا^2 مثبت ہے اور ما کی کسی خاص قیمت کے لیے لا کی دو مساوی اور باعتبار علامت متضاد قیمتیں ہونگی۔ پس ما کا محور بھی منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصّوں میں تقسیم کرتا ہے ۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر لا کے محور پر سَ اور یَ ایسے نقطے لیے جائیں کہ ج سَ = س ج اور ج یَ = ی ج نقطہ سَ بھی منحنی کا ایک ماسکہ ہوگا اور یَ میں سے ج یَ کے علی القوائم جو خط کھینچا جائیگا اس ماسکہ کا متناظر مرتب ہوگا ۔

اگر (لاَ، ماَ) کوئی سا ایک نقطہ ہے جو قطع زائد پر واقع ہے تو واضح ہے کہ نقطہ (− لاَ، − ماَ) بھی اسی منحنی پر واقع ہوگا۔ لیکن مصرحۂ بالا دو نقطے مبداء میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم پر واقع ہیں اور مبداء سے مساوی فاصلے رکھتے ہیں ۔ لہٰذا مبداء میں سے قطع زائد کا جو کوئی وتر کھینچا جاتا ہے مبداء اس کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے منحنی کا مرکز کہلاتا ہے ۔

مساوات (۴) سے یہ بھی ہویدا ہے کہ اگر لا^2 کی قیمت ل^2 سے زائد ہو تو ما^2 ایک مثبت مقدار ہوگی اور جیسے جیسے لا^2 کی قیمت بڑھتی جائیگی ویسے ما^2 کی قیمت بھی بڑھتی جائیگی ۔ اور لا اور ما کے اس طرح بڑھتے جانے کی کوئی حد یا انتہا نہیں ہے ۔ پس اس منحنی کی عام شکل ایسی ہی ہے جیسے کہ شکل ۳۷ میں

بتائی گئی ہے ۔ یعنی وہ دو نامتناہی بڑی شاخوں پر مشتمل ہے ۔

ا اَ قطع زائد کا **قاطع محور** کہلاتا ہے ۔ ا اَ کے علی القوائم ج میں سے گزرنے والا خطِ منحنی سے کسی حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا ہے ۔ لیکن اگر اس خط پر ب اور بَ دو ایسے نقطے لیے جائیں کہ ب ج = ج بَ = ب تو خط ب بَ **مزدوج محور** کہلاتا ہے ۔

(ب) قطع زائد پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کی تعیین ——

شکل ۳۷ میں چونکہ س ف = ز × ف م

لہذا س ف = ز × ی ل = ز (ج ل − ج ی) = ز $\left(\text{لا} - \frac{\text{ا}}{\text{ز}}\right)$ = ز × لا − ا

اس طرح سَ ف = ز × مَ ف = ز (ج ل + یَ ج) = ز $\left(\text{لا} + \frac{\text{ا}}{\text{ز}}\right)$ = ز × لا + ا

پس سَ ف − س ف = ۲ ا

(قبل ازیں نویں باب میں بتایا گیا تھا کہ قطع ناقص کے لیے س ف + سَ ف = ۲ ا)

(ج) اگر مرکز کو قطب مان کر قطع زائد کی قطبی مساوات معلوم کرنا مقصود ہو تو اس کی کارٹیزی مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ میں بجائے لا کے ر جم ط اور بجائے ما کے ر جب ط لکھنا چاہیے ۔ تب

$$\frac{\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{ط}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ر}^2\,\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{ب}^2} = 1 \quad \text{یعنی} \quad \frac{1}{\text{ر}^2} = \frac{\text{جم}^2\,\text{ط}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{جب}^2\,\text{ط}}{\text{ب}^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

جس کو $\frac{1}{\text{ر}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2} - \left(\frac{1}{\text{ا}^2} + \frac{1}{\text{ب}^2}\right)\text{جب}^2\,\text{ط}$ ..... (۲) بھی لکھ سکتے ہیں ۔

اس مساوات کے معائنہ سے ظاہر ہے کہ جب ط کی قیمت صفر ہوتی ہے تو $\frac{1}{\text{ر}^2}$ اعظم ہے ۔ اور اس لیے ر اقل ہے ۔ جیسے جیسے ط بڑھتا جاتا ہے کسر $\frac{1}{\text{ر}^2}$ گھٹتی ہے اور اس کی قیمت صفر ہو جاتی ہے ۔ جبکہ جب۲ ط = $\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$ ۔ پس ط کی اس قیمت پر ر نامتناہی بڑا ہوتا ہے ۔ اگر جب۲ ط کی قیمت $\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}$ سے زیادہ ہو تو $\frac{1}{\text{ر}^2}$ منفی مقدار ہو گی یعنی جو نیم قطری سمتی محور کے ساتھ $\text{جب}^{-1}\frac{\text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}}$ سے بڑھ کر زاویہ بناتا ہے منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا ہے ۔

(د) قطعِ ناقص کے متعلق سابقہ باب میں جو نتائج اخذ کیے گئے تھے ان میں سے اکثر قطعِ زائد پر بھی صادق آتے ہیں۔ ان کے ثبوت کے لیے صرف ب^2 کی علامت تبدیل کر دینا کافی ہے۔ بدیں وجہ یہ نتائج یہاں محض قلمبند کیے جاتے ہیں۔ طالب علم کو چاہیے کہ سابقہ باب کی متناظر دفعوں میں ان کا حوالہ دیکھ لے۔

(۱) خط ما = م لا + $\sqrt{\text{ا}^2\,\text{م}^2 - \text{ب}^2}$ ، م کی جملہ قیمتوں کے لیے خطِ زائد کا خطِ مماس ہے۔

(۲) نقطہ (لاَ ، ماَ) پر کے خطِ مماس کی مساوات $\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1$ ہے۔

(۳) نقطہ (لاَ ، ماَ) کے قطبی کی مساوات $\frac{\text{لا لاَ}}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ماَ}}{\text{ب}^2} = 1$ ہے

(۴) نقطہ (لاَ ، ماَ) پر کے عمود کی مساوات $\frac{\text{لا} - \text{لاَ}}{\frac{\text{لاَ}}{\text{ا}^2}} = \frac{\text{ما} - \text{ماَ}}{-\frac{\text{ماَ}}{\text{ب}^2}}$ ہے

(۵) خط ل لا + م ما = ن خطِ زائد کو مس کریگا اگر ا^2 ل^2 - ب^2 م^2 = ن^2

(۶) خط لا جم ھ + ما جب ھ = ع منحنی کو مس کریگا اگر ع^2 = ا^2 جم^2 ھ - ب^2 جب^2 ھ

(۷) خطِ زائد کے مرتب دائرہ کی مساوات لا^2 + ما^2 = ا^2 - ب^2 ہے۔ واضح ہے کہ یہ مرتب دائرہ محض خیالی ہوتا ہے جبکہ ا کی قیمت ب سے کم ہو۔ اور صفر ہو جاتا ہے جبکہ ا = ب

(۸) خطِ ناقص کے متعلق سابقہ باب میں جو ہندسی مسائل ثابت کیے گئے تھے وہ خطِ ناقص پر بھی صادق آتے ہیں۔

(۹) خط ما = م لا کے متوازی تمام وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ما = مَ لا ہے جس میں م مَ = $\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$

(۱۰) خطوط ما = م لا اور ما = مَ لا مزدوج ہیں اگر م مَ = $\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$ یہ دونوں قطر منحنی سے ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جن کے فصلوں یا مقطوعوں کی مساواتیں

لا^2 $\left(\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{م}^2}{\text{ب}^2}\right) = 1$ اور لا^2 $\left(\frac{1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{مَ}^2}{\text{ب}^2}\right) = 1$ ہیں۔

پہلی مساوات سے لا کی حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اگر م کی قیمت $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ سے کمتر ہو ۔ اور دوسری مساوات سے حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اگر مَ کی قیمت $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ سے کمتر ہو۔ لیکن چونکہ م مَ = $\frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$ اس لیے م اور مَ دونوں $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ سے کمتر نہیں ہوسکتے اور نہ دونوں اس سے زائد ہوسکتے ہیں ۔ پس خطِ زائد کے دو مزدوج قطروں میں سے ایک قطر اس منحنی سے حقیقی نقطوں میں ملتا ہے اور دوسرا خیالی نقطوں میں ۔

اگر م = ± $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ تو دونوں مزدوج قطر باہمی منطبق ہوجاتے ہیں۔

(و) فرض کرو ف اور د مزدوج قطروں کے ایک جوڑ کے سرے ہیں۔ ف کے محدد لا_1، ما_1 ہیں اور د کے لا_2، ما_2۔ ابھی ابھی ہم نے دیکھا ہے کہ اگر ان دو نقطوں میں سے ایک نقطہ حقیقی ہے تو دوسرا نقطہ خیالی ہوگا۔

ج ف اور ج د کی مساواتیں $\frac{\text{ما}}{\text{ما}_1} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}_1}$ اور $\frac{\text{ما}}{\text{ما}_2} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}_2}$ ہیں

پس ازروئے نتیجہ ۹ (د)

$$\frac{\text{لا}_1\,\text{لا}_2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}_1\,\text{ما}_2}{\text{ب}^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\text{پس}\quad \frac{\text{لا}_1^2\,\text{لا}_2^2}{\text{ا}^4} = \frac{\text{ما}_1^2\,\text{ما}_2^2}{\text{ب}^4}$$

چونکہ (لا_1، ما_1) اور (لا_2، ما_2) دونوں نقطے منحنی پر واقع ہیں ۔ لہٰذا

$$\frac{\text{لا}_2^2}{\text{ا}^2}\left(1+\frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}\right) = \left(\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2}-1\right)\frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{لا}_2^2}{\text{ا}^2} = -\frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}$$

$\therefore\ \text{لا}_2 = \pm\frac{\text{ا}}{\text{ب}}\,\text{ما}_1\sqrt{-1}\ \ldots\ (2)$ اور اس لیے ازروئے (۱)، $\text{ما}_2 = \pm\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{لا}_1\sqrt{-1}\ \ldots\ (3)$

(۲) اور (۳) مساواتوں سے $\text{ج ف}^2 + \text{ج د}^2 = \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}\text{ما}_1^2 - \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\text{لا}_1^2$

$$= \text{ا}^2\left(\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}\right) - \text{ب}^2\left(\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}\right) = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$$

پس قطع ناقص کی طرح قطع زائد کے دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا **حاصل جمع** مستقل ہے۔

(ز) تعریف - کسی منحنی کا متقارب ایک ایسا خطِ مستقیم ہے جو اس منحنی سے لاتناہی پر دو نقطوں میں ملتا ہے لیکن جو لاتناہی پر بالکلیہ واقع نہیں ہے۔

قطع زائد کے متقارب کی تعیین۔ خطِ مستقیم $ما = م لا + ج$ جن نقطوں پر قطع زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کو قطع کرتا ہے ان کے فصلے مساوات

$$\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{(م لا + ج)^2}{ب^2} = 1 \quad یعنی \quad لا^2\left(\frac{1}{ا^2} - \frac{م^2}{ب^2}\right) - \frac{2 م ج}{ب^2} لا - \frac{ج^2}{ب^2} - 1 = 0$$

سے دریافت ہوتے ہیں۔ اس مساوات کی دونوں اصلیں نامتناہی ہو جاتی ہیں اگر $لا^2$ اور لا دونوں کے سر صفر ہوں۔ یعنی اگر $\frac{1}{ا^2} - \frac{م^2}{ب^2} = 0$ اور $م ج = 0$۔
پس اس صورت میں $ج = 0$ اور $م = \pm \frac{ب}{ا}$

لہٰذا قطع زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = 1$ کے دو حقیقی متقارب ہوتے ہیں جن کی مساواتیں $ما = \pm \frac{ب}{ا} لا$ ہیں۔ اگر ان کو ایک ہی مساوات میں لکھا جائے تو $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = 0$ ہے۔ ب، بَ میں سے خطوطِ مستقیم منحنی کے قاطع محور کے متوازی کھینچو اور ا، اَ میں سے خطوطِ مزدوج محور کے متوازی کھینچو۔ تب اس آخری مساوات سے ظاہر ہے کہ منحنی کے متقارب شدہ مستطیل کے وتر ہیں۔

قطع ناقص کے کوئی حقیقی نقطے لاتناہی پر واقع نہیں ہیں اور اس لیے ناقص کے متقارب خیالی ہیں۔

فصل (ہ) کے آخری نتیجہ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ قطع زائد کے متقاربِ منطبق مزدوج قطروں کے ایک جوڑ پر واقع ہیں۔

متقارب کے متوازی کھنچا ہوا خط منحنی سے لاتناہی پر ایک نقطہ میں ملتا ہے۔

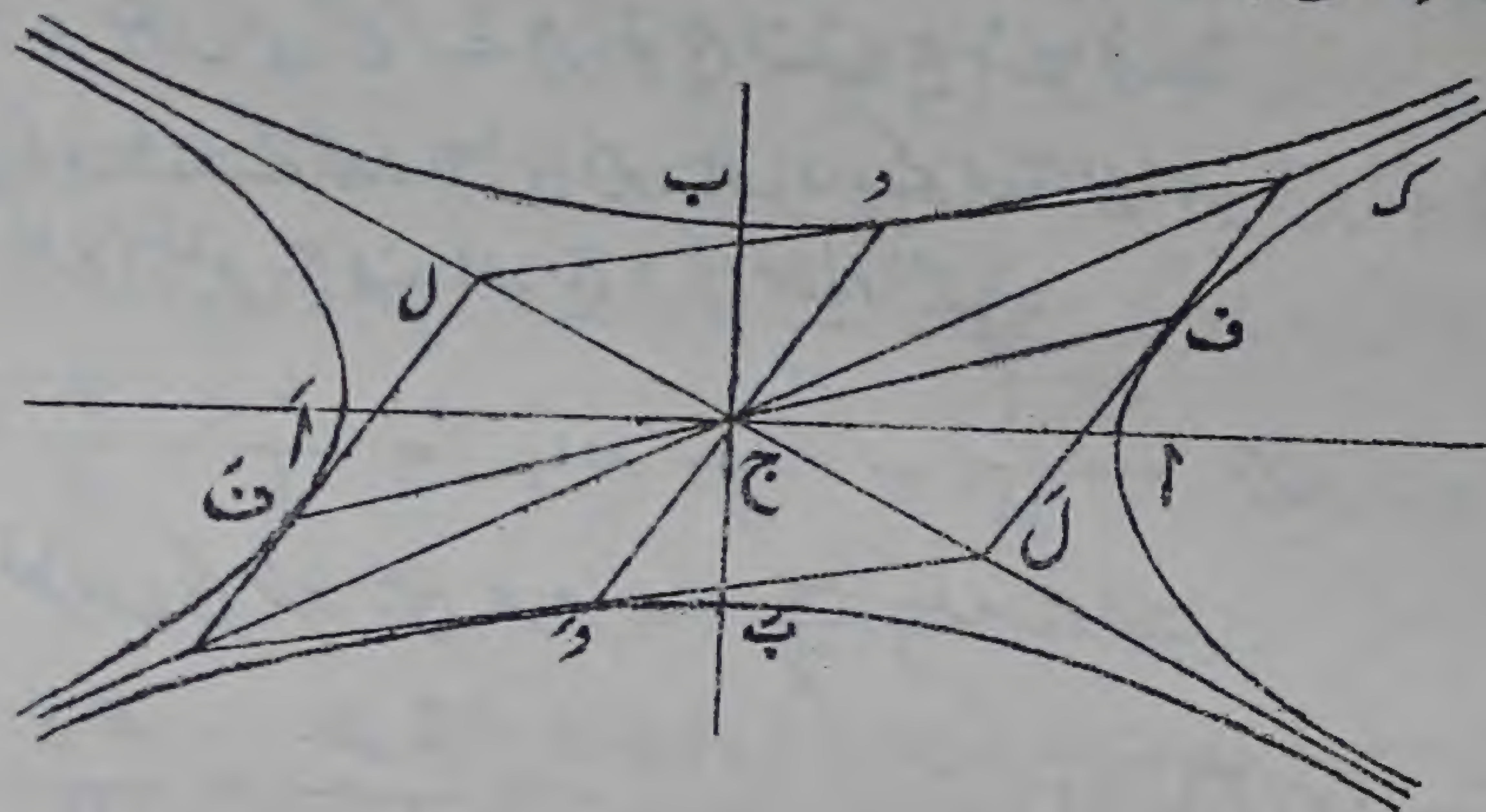
اس لیے کہ مساوات $لا^2\left(\frac{1}{ا^2} - \frac{م^2}{ب^2}\right) - \frac{2 م ج}{ب^2} لا - \frac{ج^2}{ب^2} - 1 = 0$ کی ایک اصل نامتناہی ہو جاتی ہے اگر $لا^2$ کا سر صفر ہو۔ یہ شرط اس صورت میں پوری ہوتی ہے جبکہ $م = \pm \frac{ب}{ا}$۔ پس خطِ مستقیم $ما = \pm \frac{ب}{ا} لا + ج$ قطع زائد سے

لاتناہی پر ایک نقطہ میں ملتا ہے ج کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو -

(ح) جب قطع زائد کا قاطع محور ب بَ ہے اور مزدوج محور ۲ا اس کی مساوات

$$-\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}-\frac{ما^{۲}}{ب^{۲}}=۱ \quad .... \quad (۱)$$

یہ قطع زائد اور $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}}-\frac{ما^{۲}}{ب^{۲}}=۱$ ...... (۲) مساوات کا ابتدائی قطع زائد باہمدیگر مزدوج کہلاتے ہیں - دیکھو شکل نمبر ۳۸



شکل نمبر ۳۸

ذیل میں مزدوج زائد قطعوں کے جوڑ کی چند مساواتیں درج کی جاتی ہیں :-

(۱) دونوں زائد قطعوں کے ایک ہی متقارب ہوتے ہیں۔

(۲) اگر دو قطر ان دو زائد قطعوں میں سے ایک زائد قطع کے لحاظ سے مزدوج ہوں تو وہ دوسرے زائد قطع کے لحاظ سے بھی مزدوج ہونگے جیسا کہ فصل نمبر (۹) سے مستنبط ہوتا ہے۔

(۳) مصرحۂ بالا مزدوج زائد قطعوں کی مساواتیں جیسا کہ فصل (ج) میں بتایا گیا ہے، بشکل

$$\frac{۱}{ر^{۲}}=\frac{جم^{۲}ط}{ا^{۲}}-\frac{جب^{۲}ط}{ب^{۲}} \quad اور \quad -\frac{۱}{ر^{۲}}=\frac{جم^{۲}ط}{ا^{۲}}-\frac{جب^{۲}ط}{ب^{۲}}$$

لکھی جا سکتی ہیں۔

واضح ہے کہ اگر طہ کی کسی قیمت کے لیے سر^2 ایک منحنی کے لیے مثبت ہے تو وہ دوسرے منحنی کے لیے منفی ہوگا۔

پس ہر ایک قطر ایک منحنی سے حقیقی نقطوں میں ملیگا اور دوسرے منحنی سے خیالی نقطوں میں ملیگا۔ معہذا ان دو منحنیوں کے نصف قطروں کے طول طہ کی جملہ قیمتوں کے لیے رابطہ $\text{سر}^2 = -\text{سر}'^2$ کے ذریعہ مربوط ہیں۔

(۴) اگر دو مزدوج قطر مساوات (۲) اور مساوات (۱) والے منحنیوں کو علی الترتیب ف اور د نقطوں میں قطع کرتے ہیں تو $\text{ج ف}^2 - \text{ج د}^2 = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$

فرض کرو ف کے محدد لا_1، ما_1 ہیں اور د کے محدد لا_2، ما_2

تب خطوطِ مستقیم ج ف اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{\text{لا}}{\text{لا}_1} - \frac{\text{ما}}{\text{ما}_1} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}}{\text{لا}_2} - \frac{\text{ما}}{\text{ما}_2} = 0 \quad \text{ہیں}$$

مزدوج قطروں کی شرط یعنی $\text{مر}\,\text{مر}' = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$ سے مساوات

$$\frac{\text{لا}_1\text{لا}_2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}_1\text{ما}_2}{\text{ب}^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3) \quad \text{حاصل ہوتی ہے}$$

(اس لیے کہ $\text{مر} = \frac{\text{ما}_1}{\text{لا}_1}$ اور $\text{مر}' = \frac{\text{ما}_2}{\text{لا}_2}$ پس $\frac{\text{ما}_1\text{ما}_2}{\text{لا}_1\text{لا}_2} = \text{مر}\,\text{مر}' = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}$)

$$\text{پس} \quad \frac{\text{لا}_1^2\text{لا}_2^2}{\text{ا}^4} = \frac{\text{ما}_1^2\text{ما}_2^2}{\text{ب}^4}$$

اور چونکہ نقطہ (لا_1، ما_1) منحنی (۲) پر واقع ہے اور نقطہ (لا_2، ما_2) منحنی (۱) پر لہذا

$$\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2}\left(\frac{\text{ما}_2^2}{\text{ب}^2} - 1\right) = \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}\left(\frac{\text{لا}_2^2}{\text{ا}^2} - 1\right) \quad \text{یا} \quad \frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} = \frac{\text{ما}_2^2}{\text{ب}^2}$$

$$\therefore \frac{\text{ما}_2}{\text{ب}} = \pm\frac{\text{لا}_1}{\text{ا}} \ldots\ldots (4) \quad \text{اور اس لیے مساوات (۳) سے} \quad \frac{\text{لا}_2}{\text{ا}} = \pm\frac{\text{ما}_1}{\text{ب}} \ldots\ldots (5)$$

$$\text{پس} \quad \text{ج ف}^2 - \text{ج د}^2 = \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \text{لا}_2^2 - \text{ما}_2^2$$

$$= \text{لا}_1^2 + \text{ما}_1^2 - \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}\text{ما}_1^2 - \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\text{لا}_1^2 = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\left(\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^2}\right)$$

$$\therefore \text{ج ف}^2 - \text{ج د}^2 = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$$

[یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ج ف اور ج د فردوج نصف قطر نہیں ہیں اس لیے کہ ف اور د ایک ہی قطع زائد پر واقع نہیں ہیں۔ خطِ د ج دَ ابتدائی قطع زائد کو دو خیالی نقطوں میں قطع کرتا ہے اور اگر یہ نقطے د، دَ فرض کیے جائیں تو مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ $\text{ج دَ}^2 = -\text{ج د}^2$]

(۵) ف، فَ، د، دَ پر کے خطوط مماس سے تیار شدہ متوازی الاضلاع کا رقبہ مستقل ہے اور ا ب کے مساوی ہے۔

یہ متوازی الاضلاع ۴ ج ف × ج د جب ف ج د یا ۴ ج د × ج و کے مساوی ہے جس میں ج و نقطہ ف پر کے مماس پر ج سے ڈالا ہوا عمود ہے۔

ف پر کے مماس کی مساوات $\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1$ ہے $\therefore \text{ج و}^2 = \frac{1}{\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^4} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^4}}$

اور $\text{ج د}^2 = \frac{\text{ا}^2}{\text{ب}^2}\text{ما}_1^2 + \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}^2}\text{لا}_1^2 = \text{ا}^2\text{ب}^2\left(\frac{\text{لا}_1^2}{\text{ا}^4} + \frac{\text{ما}_1^2}{\text{ب}^4}\right)$

پس ج د × ج و = ا ب

(۶) متقارب ف د اور ف دَ کی تنصیف کرتے ہیں۔

اگر خط ف د کے وسطی نقطہ کے محدد لا، ما ہوں تو $2\,\text{لا} = \text{لا}_1 + \text{لا}_2$ اور $2\,\text{ما} = \text{ما}_1 + \text{ما}_2$

$$\therefore \frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \frac{\text{لا}_1 + \text{لا}_2}{\text{ما}_1 + \text{ما}_2} = \frac{\text{لا}_1 \pm \frac{\text{ا}}{\text{ب}}\text{ما}_1}{\text{ما}_1 \pm \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\text{لا}_1} = \pm \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

پس خطوط ف د اور ف دَ کے وسطی نقطے خطوط $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \pm \frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ میں سے کسی ایک خط پر واقع ہیں۔ معہذا چونکہ ج ف ک د متوازی الاضلاع ہے ج ک خط ف د یا خط ف دَ کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے متقاربوں میں سے ایک متقارب ہے۔ اس لیے د اور دَ پر کے خطوطِ مماس د اور دَ پر کے خطوط مماس سے متقاربوں پر ملتے ہیں۔

(۷) بلحاظ قطع زائد (۲) نقطہ (لا۱، ما۱) کے قطبی کی مساوات $\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1$ ہے اور بلحاظ قطع زائد (۱) اس نقطہ کے قطبی کی مساوات $-\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1$ ہے

پس ان دونوں منحنیوں کے لحاظ سے کسی نقطہ کے قطبی باہمدیگر متوازی ہیں اور مرکز سے مساوی فاصلوں پر واقع ہیں۔

اگر (لا۱، ما۱) کوئی سا ایک نقطہ ف، منحنی (۲) پر واقع ہو تو اس کا قطبی بلحاظ منحنی (۱)

$$-\frac{\text{لا لا}_1}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما ما}_1}{\text{ب}^2} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{\text{لا}(-\text{لا}_1)}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}(-\text{ما}_1)}{\text{ب}^2} = 1$$ ہے۔

لیکن آخرالذکر مساوات منحنی (۲) کے نقطہ (-لاَ، -ماَ) پر کے خطِ مماس کی مساوات ہے اور یہ نقطۂ ف میں سے گزرنے والے قطر کا دُوسرا سِرا ہے۔

پس ایک قطع زائد پر کے کسی نقطہ ف سے اس کے مزدوج قطع زائد پر خطوطِ مماس ف ق، ف قَ کھینچے جائیں تو خط ق قَ ابتدائی قطع زائد کو ف میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سِرے پر مس کریگا۔

(ط) کوئی سے مزدوج قطروں کے جوڑ کو محور مان کر قطع زائد کی مساوات کی تعیین۔ قاطع اور مزدوج محوروں کے حوالہ سے قطع زائد کی مساوات $\frac{لا^2}{اُ^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ١$ ہے۔

چونکہ مبدا میں کوئی تبدیلی نہیں کی جاتی ہے اس لیے نئی مساوات حاصل کرنے کی خاطر بجائے لا، ما کے ہم $ل_1 لا + م_1 ما$ اور $ل_2 لا + م_2 ما$ لکھتے ہیں۔ اس سے مساوات

$$\frac{(ب^2 ل_1^2 + اُ^2 ل_2^2)}{اُ^2 ب^2} لا^2 + 2 \frac{(ل_1 م_1 + ل_2 م_2)}{اُ^2 ب^2} لا ما + \frac{(ب^2 م_1^2 + اُ^2 م_2^2)}{اُ^2 ب^2} = 1$$

حاصل ہوتی ہے جو بشکل $ا لا^2 + 2 ح لا ما + ب ما^2 = 1 \ldots\ldots (1)$ ہے۔

ہم نے چونکہ دو مزدوج قطروں کو محور مانا لا کا محور ما کے محور کے وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔ پس لا کی کسی ایک مخصوص قیمت کے لیے از روئے مساوات (۱) ما کی دریافت شدہ دونوں قیمتیں مساوی و باہدیگر مخالف ہونی چاہییں۔ جس کے معنی یہ ہوئے کہ ح = ۰ اور منحنی کی مساوات بشکل $ا لا^2 + ب ما^2 = 1 \ldots\ldots\ldots (2)$ ہوگی۔

ہم جانتے ہیں کہ ان دو نصف مزدوج قطروں میں سے ایک حقیقی ہے اور دوسرا خیالی۔ پس اگر ان کے طول اَ اور $\sqrt{-1}$ بَ فرض کیے جائیں تو چونکہ یہ طول علی الترتیب لا اور ما کے محوروں پر کے مقطوعے ہیں لہٰذا مساوات (۲) میں ما اور لا کو علیحدہ علیحدہ صفر لکھنے سے

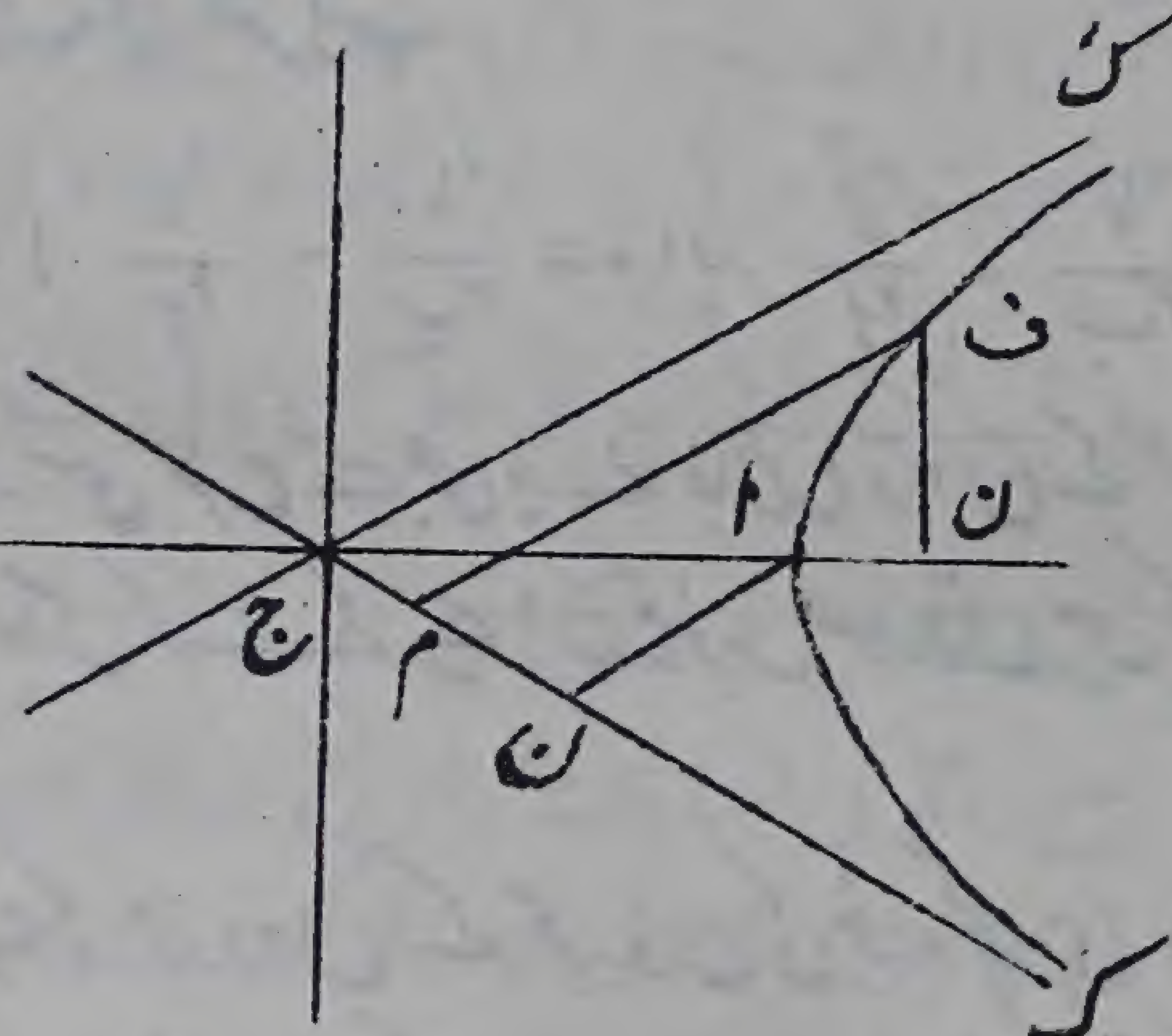
$ا اَ^2 = 1$ اور $ب (\sqrt{-1}\, بَ)^2 = 1$ یعنی $ا = \frac{1}{اَ^2}$ اور $ب = -\frac{1}{بَ^2}$

پس ان نئے محوروں کے حوالہ سے قطع زائد کی مساوات $\frac{لا^2}{اَ^2} - \frac{ما^2}{بَ^2} = 1 \ldots (3)$ ہے

چونکہ اس مساوات کی شکل وہی ہے جو ابتدائی مساوات کی تھی لہٰذا وہ جملہ تحقیقات جس میں منحنی کے محور باہدیگر علی القوائم نہیں مانے گئے تھے حالیہ محوروں کے

ساتھ بھی برقرار رہتی ہیں۔ مثلاً ۔د کے نتائج (۱)، (۲)، (۳)، (۵) اور (۱۱) میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوتی۔ اسی طرح متقاربوں سے متعلق نتائج بھی جن کا ذکر ۔ز میں آیا ہے برقرار رہتے ہیں۔ پس قطع زائد $\frac{لا^2}{ل^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے متقاربوں کی مساوات $\frac{لا^2}{ل^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۰$ ہے۔

(ی) خطِ زائد کی مساوات، اس کے متقاربوں کو محددوں کے محور مان کر۔ فرض کرو کہ شکل ۳۹ میں ج ک، ج کَ قطع زائد کے متقارب ہیں اور زاویہ اج کَ = عہ یعنی سس عہ = $\frac{ب}{ل}$، ف قطع زائد پر کا ایک نقطہ ہے جس کے محدد ج لا اور ج ما محوروں کے حوالہ سے لا، ما ہیں اور ج ک، ج کَ محوروں کے حوالہ سے لاَ، ماَ ہیں۔ خط ف م، ج کَ کے متوازی کھینچو اور اس کو ج ک سے نقطہ م میں ملنے دو۔ اور خط ف ن قاطع محور کے علی القوائم کھینچو۔



شکل ۳۹

تب ج م = لاَ، م ف = ماَ، ج ن = لا، ن ف = ما

چونکہ ج ن = ج م جم عہ + م ف جم عہ

لا = (لاَ + ماَ) جم عہ .... (۱)

اور چونکہ ن ف = م ف جب عہ ۔ ج م جب عہ

ما = (ماَ - لاَ) جب عہ .... (۲)

پس مساوات $\frac{لا^2}{ل^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ میں یہ قیمتیں درج کرنے سے مساوات

$$\frac{\text{جم}^{2}\text{ع}\ (\text{لاَ}+\text{ماَ})^{2}}{\text{ا}^{2}} - \frac{\text{جب}^{2}\text{ع}\ (\text{ماَ}-\text{لاَ})^{2}}{\text{ب}^{2}} = ۱ \ ..... (۳)$$ حاصل ہوتی ہے۔

لیکن مس ع = $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ پس $\frac{\text{جب}^{2}\text{ع}}{\text{ب}^{2}} = \frac{\text{جم}^{2}\text{ع}}{\text{ا}^{2}} = \frac{1}{\text{ا}^{2}+\text{ب}^{2}}$

پس از روئے مساوات (۳) $۴\ \text{لاَ}\ \text{ماَ} = \text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}$

یعنی متقاربوں کو جب حوالہ کے محور مانتے ہیں تو قطع زائد کی مساوات

$۴\ \text{لا}\ \text{ما} = \text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}$ برآمد ہوتی ہے۔

اسی طرح مزدوج قطع زائد کی مساوات متقاربوں کے حوالہ سے

$۴\ \text{لا}\ \text{ما} = -\ (\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2})$ حاصل ہوتی ہے۔

(ک) علی القائم محددوں کے حوالہ سے قطع زائد، اس کے متقاربوں اور مزدوج قطع زائد کی مساواتیں علی الترتیب

$\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} - \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ۱$ ، $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} - \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ۰$ اور $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{2}} - \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = -۱$ ہیں

اگر محددوں کے محور کسی طرح سے بھی بدلے جائیں تو ان کے لحاظ سے معرضۂ بالا "منحنیوں" کی نئی مساواتیں حاصل کرنے کے لیے ان تینوں صورتوں میں یکساں تعویض کی ضرورت ہوگی۔

پس واضح ہے کہ محددوں کے محوروں کی خواہ کچھ ہی وضع ہو قطع زائد اور مزدوج قطع زائد کی مساواتیں متقاربوں کی مساوات سے صرف ان کے مستقلوں کے لحاظ ہی سے مختلف ہونگی اور ان زائد قطعوں کے یہ مستقل باہمدیگر مساوی اور مختلف العلامت ہونگے۔

(ل) جب قطع زائد کے متقاربوں کے مابین کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے تو اس کو قایم قطع زائد کہتے ہیں۔

چونکہ متقاربوں کا درمیانی زاویہ $۲\ \text{مس}^{-1}\ \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ کے مساوی ہوتا ہے اس لیے اس کی قیمت ایک زاویۂ قائمہ ہونے کی صورت میں ب = ا ہو جاتا ہے۔ اس لحاظ سے ایسے منحنی کو بعض اوقات متساوی الاضلاع قطع زائد بھی کہتے ہیں۔

واضح ہے کہ ایسے یعنی قایم قطع زائد کی مساوات $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ ہے۔

چونکہ اس سے بیشتر کی ایک فصل میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ متقاربوں کو جب محور مانتے ہیں تو قطع زائد کی مساوات $4\,\text{لاما} = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$ اور اس کے مزدوج قطع زائد کی مساوات $4\,\text{لاما} = -(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)$ ہوتی ہے۔ لہٰذا قائم قطع زائد اور اس کے مزدوج کی مساواتیں متقاربوں کو محور ماننے پر علی الترتیب $2\,\text{لاما} = \text{ا}^2$ اور $2\,\text{لاما} = -\text{ا}^2$ ہو جاتی ہیں۔

[طالب علم کو چاہیے کہ بطور مشق قائم قطع زائد کی مساوات $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ سے آغاز کر کے متقاربوں کو محدد مانے اور ان جدید محددوں کی رقموں میں منحنی کی مساوات حاصل کرے۔

واضح ہو کہ ایسے قطع زائد کے متقاربوں کی مساواتیں $\text{لا} - \text{ما} = 0$ اور $\text{لا} + \text{ما} = 0$ ہیں اور یہ خطوط باہمدیگر علی القوائم ہیں۔ پس حوالہ کے محوروں کو $-\frac{\pi}{4}$ زاویہ میں گھمانے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔ اس لیے کہ ایسی صورت میں $\text{لا} = \frac{\text{لا}' + \text{ما}'}{\sqrt{2}}$ اور $\text{ما} = \frac{-\text{لا}' + \text{ما}'}{\sqrt{2}}$ پس مساوات $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 = \text{ا}^2$ میں لا اور ما کی یہ قیمتیں تعویض کرنے سے $\frac{(\text{لا}' + \text{ما}')^2}{2} - \frac{(-\text{لا}' + \text{ما}')^2}{2} = \text{ا}^2$ حاصل ہوتی ہے جو صاف کرنے پر مساوات $2\,\text{لاما} = \text{ا}^2$ میں تبدیل ہو جاتی ہے]۔

(م) قطع ناقص یا قطع زائد کی مساوات، راس کو مبداء مان کر یوں حاصل کی جا سکتی ہے کہ مرکز مبداء والی مساوات میں لا کے عوض لا ـ ا لکھا جائے یعنی

$$\frac{(\text{لا} - \text{ا})^2}{\text{ا}^2} \pm \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

اب اگر فرض کیا جائے کہ راس سے اس کے قریب تر ماسکہ کا فاصلہ مستقل (بالفرض د) رکھا جاتا ہے اور خروج المرکز کی قیمت اکائی ہو جاتی ہے تو منحنی کی صورت قطع مکافی میں تبدیل ہو جاتی ہے جس کا وتر خاص ۴ د ہے۔

چونکہ $\text{د} = \text{ا} - \text{از} = \text{ا}(1 - \text{ز})$ لہٰذا ز کی قیمت جب اکائی ہوتی ہے تو ا نامتناہی ہو جاتا ہے۔

معہذا $\text{ا}(1 - \text{ز}^2) = \text{د}(1 + \text{ز}) = 2\,\text{د} \therefore \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}} = 2\,\text{د}$

پس مساوات (۱) کی رُو سے $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{و}} \pm \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{۲و}} - \text{۲ لا} = ۰$

چونکہ $\text{و} = \infty$ پس $\text{ما}^{۲} = \pm \text{۴ د لا}$

اس لیے قطع مکافی قطع ناقص یا زائد کی انتہائی صورت ہے۔ اس کا وتر خاص محدود ہے لیکن محور اعظم و محور اقل ناتناہی ہیں۔ اس کا مرکز اور نیز دوسرا ماسکہ بھی لاتناہی پر واقع ہیں۔

طالب علم کے لیے مفید ہوگا کہ بطور مشق قطع مکافی کے خواص قطع ناقص یا قطع زائد کے خواص سے مستنبط کرے۔

دسویں باب کی مثالیں

(۱)۔ مندرجۂ ذیل زائدوں کے متقاربوں اور ان کے مزدوج زائدوں کی مساواتیں دریافت کرو اور ان کی ترسیم کرو:-

(و) $\text{۴ لا}^{۲} - \text{ما}^{۲} = ۳۶$ ، (ب) $\text{۸ لا}^{۲} - \text{۱۶ ما}^{۲} + ۲۵ = ۰$

(۲) اگر ز اور زَ دو مزدوج زائدوں کے خروج المرکز ہوں تو $\frac{۱}{\text{ز}^{۲}} + \frac{۱}{\text{زَ}^{۲}} = ۱$

(۳) کسی قطع زائد کے متقارب سے اس کے ماسکوں کا فاصلہ عدداً ب کے مساوی ہے۔

(۴) مرکز سے ایک ایسے خط کا فاصلہ جو قطع زائد کے ایک ماسکہ سے ایک متقارب پر علی القوائم کھینچا جائے عدداً و کے مساوی ہے۔

(۵) متقاربوں سے قطع زائد کے کسی نقطہ کے فاصلوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ قایم قطع زائد کا خروج المرکز $\sqrt{۲}$ ہے۔

(۷) $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{و}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} - ۱ = ۰$ پر کے کسی نقطہ کا قطبی بلحاظ $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{و}^{۲}} - \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ ناقص $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{و}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ کو مس کرتا ہے۔

(۸) اگر نقطہ (عہ ، بہ) کا قطبی بلحاظ منحنی $\text{ما}^{۲} - \text{۴ و لا} = ۰$ منحنی $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} - \text{۴ و}^{۲} = ۰$

کو مس کرتا ہے تو نقطہ (عہ، بہ) قایم قطع زائد لا^{2} ـ ما^{2} ـ ۴ ر^{2} = ۰ پر واقع ہے۔

(۹) قطع زائد کے کسی خطِ مماس کا وہ جزو جو اس کے متقاربوں کا مقطوعہ ہے نقطہ تماس پر تنصیف پاتا ہے۔

(۱۰) قطع زائد کا کوئی سا خطِ مماس متقاربوں سے مستقل رقبہ کا مثلث قطع کرتا ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ ما ـ ہر لا = ۰ اور ما + ہر لا = ۰ ہر کی تمام قیمتوں کے لیے لا ما = ج^{2} کے مزدوج قطر ہیں۔

(۱۲) خط مستقیم لا = ۰ قطع زائد ۲ لا ما + ۳ لا^{2} + ۴ لا = ۹ کا ایک متقارب ہے۔ دوسرے متقارب کی مساوات کیا ہے؟

(۱۳) اگر ہم مرکز دائروں کے کسی نظام پر کسی دیے ہوئے خط مستقیم کے متوازی خطوطِ مماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاطِ تماس ایک قایم قطع زائد پر واقع ہیں۔

(۱۴) کسی قایم قطع زائد کے مرکز سے کسی نقطہ کا فاصلہ اس کے قطبی سے مرکز کے عمودی فاصلہ کا بالعکس متناسب ہے۔

(۱۵) ایک قطع زائد کے متقاربوں کے متوازی خطوط کھینچ کر ایک متوازی الاضلاع تیار کیا جاتا ہے اور اس کا ایک وتر قطع زائد کا وتر ہے۔ ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع کے دوسرے وتر کی سمت قطع زائد کے مرکز میں سے گزرتی ہے۔

(۱۶) قایم قطع زائد کے کسی نقطہ سے اس کے کسی قطر کے سروں تک کھینچے ہوئے خطوطِ مستقیم متقاربوں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

گیارہواں باب

ماسکہ کو قطب مان کر مخروطی کی مساوات

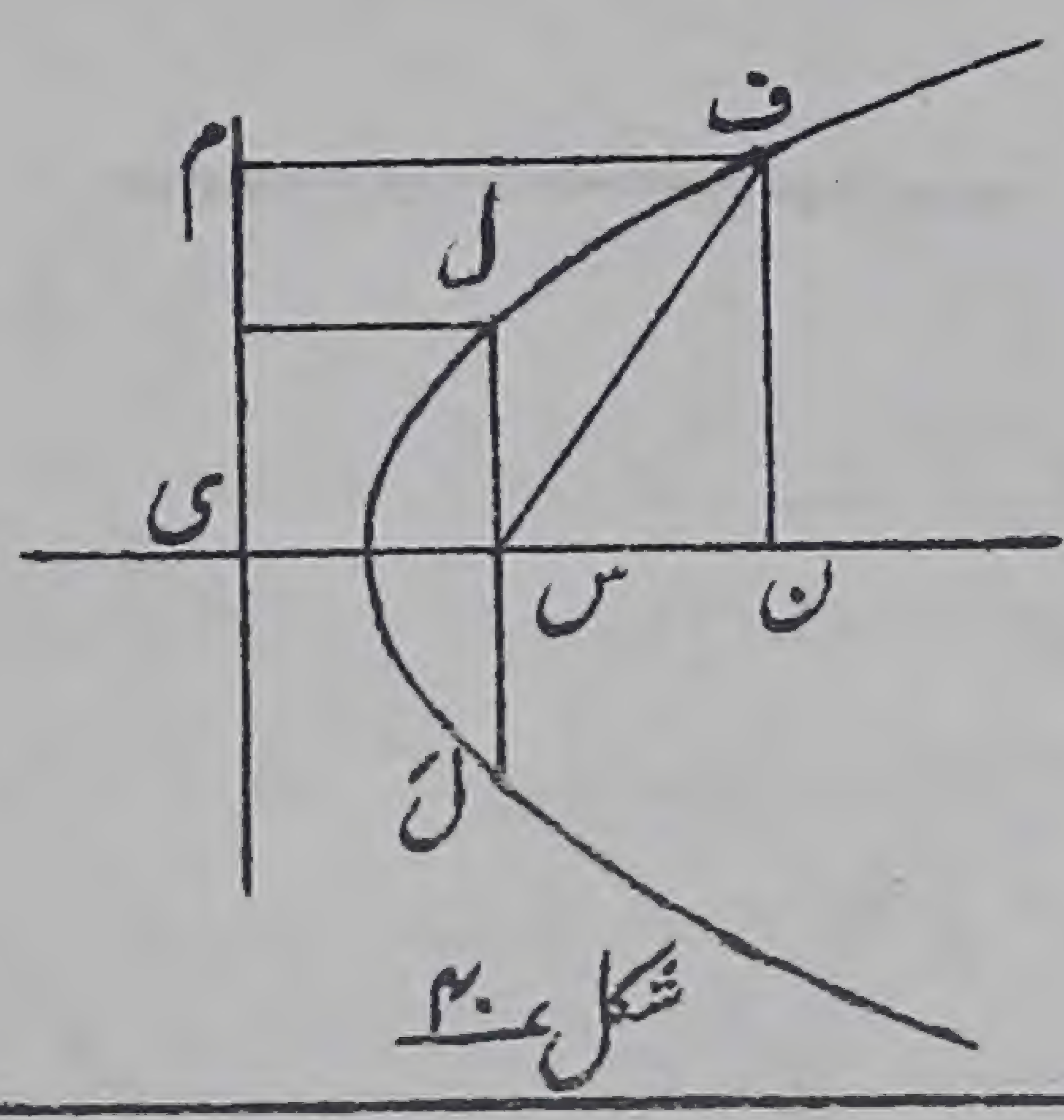
۶۴ (ا)۔ ماسکہ کو قطب مان کر مخروطی کی مساوات کی تعیین۔

فرض کرو کہ س مخروطی کا ماسکہ ہے ی م اس کا مرتب اور ز اس کا خروج المرکز۔ خط س ی مرتب پر علی القوائم کھینچو اور س ی کو ابتدائی خط تصور کرو (ملاحظہ ہو شکل نمبر ۴۰) ل س لؔ کو وتر خاص فرض کرو تو ز (س ی) = س ل، اس کو لہ قرار دو۔ منحنی پر کے کسی نقطہ ف کے محددوں کو سہ اور طہ مانو۔ ف م اور ف ن بالترتیب مرتب اور خط س ی پر عمود کھینچو۔

تب س ف = ز × ف م = ز × ن ی = ز × ن س + ز × س ی

یعنی سہ = -ز سہ جم طہ + لہ

∴ لہ/سہ = ۱ + ز جم طہ



شکل نمبر ۴۰

اگر مخروطی کا محور ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ ع بناتا ہے تو مخروطی کی مساوات

ل/ر = ۱ + زجم (ط - ع) ہوگی۔

کیونکہ اس صورت میں خط س ف خط س ی کے ساتھ زاویہ ط - ع بناتا ہے۔

(ب) اگر ر، ط مرتب پر کے کسی نقطہ کے محدد ہوں تو ر جم ط = س ی = ل/ز

∴ مرتب کی مساوات ل/ر = زجم ط ہے۔

[مخروطی کی مساوات اگر ل/ر = ۱ + زجم (ط - ع) ہو تو اس کے مرتب کی مساوات ل/ر = زجم (ط - ع) ہوگی]

اگر س ف ف' ماسکی وتر ہے اور ف کا زاویۂ سمتی ط ہے تو ف' کا زاویۂ سمتی ط + π ہوگا۔

پس اگر س ف = ر اور س ف' = ر' تو

ل/ر = ۱ + زجم ط اور ل/ر' = ۱ + زجم (ط + π)

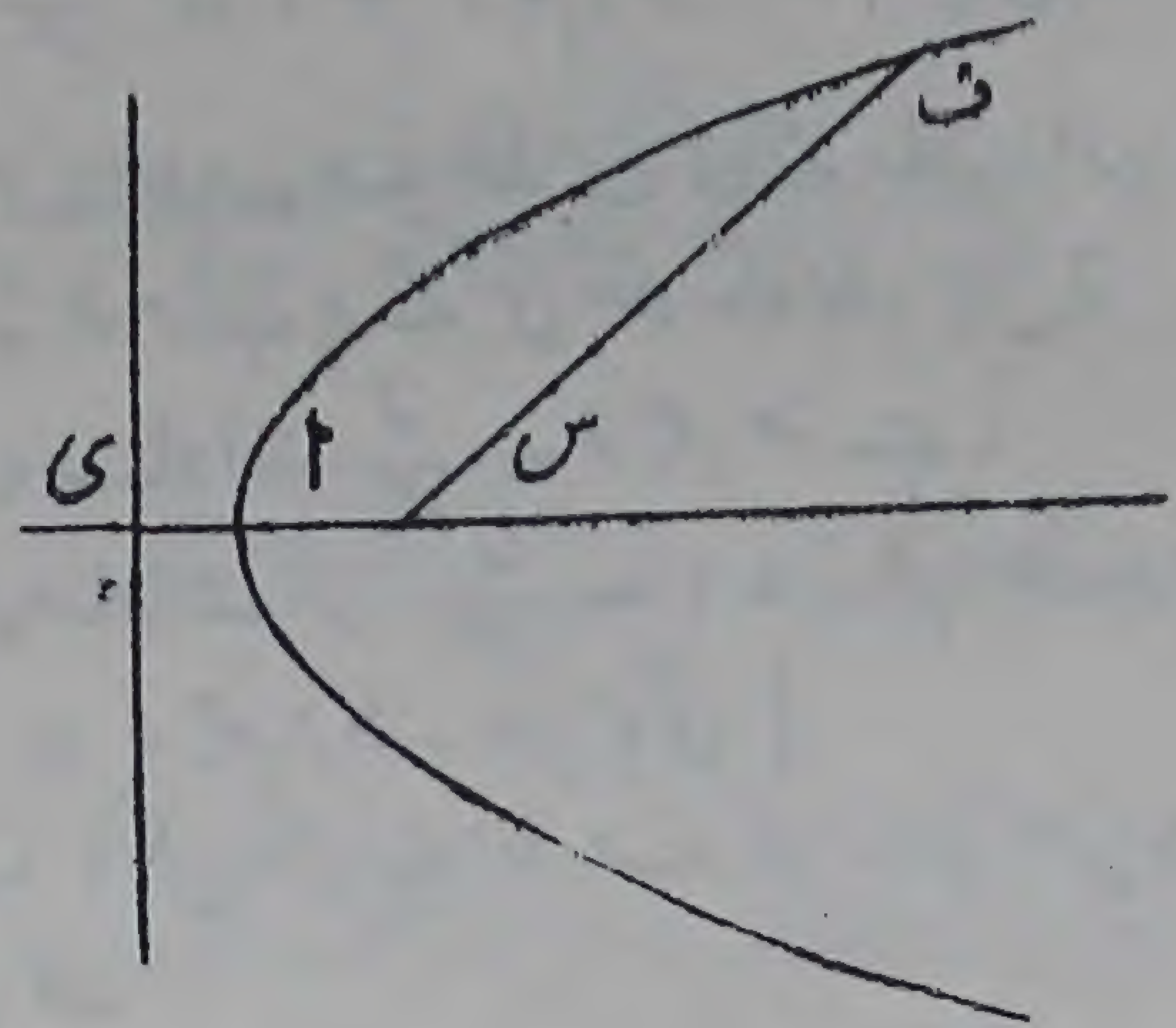
∴ ل/ر + ل/ر' = ۲ یعنی ۱/ر + ۱/ر' = ۲/ل

اس لیے کسی بھی مخروطی میں نصف وتر خاص، کسی بھی ماسکی وتر کے قطعات کا موسیقی اوسط ہے۔

(ج) مخروطی ل/ر = ۱ + زجم ط کی ترسیم، اس کی مساوات کے ذریعہ

(۱) فرض کرو ز = ۱ تب منحنی قطع مکافی ہے اور مساوات ل/ر = ۱+جم ز ہو جاتی ہے۔ نقطہ ا پر جہاں کہ منحنی محور کو قطع کرتا ہے، ط = ۰ اور ر = ½ ل جیسے جیسے زاویہ ط بڑھتا ہے ویسے ہی (۱ + جم ط) گھٹتا ہے اور اس لیے ر بڑھتا ہے۔ اس طرح ر بغیر کسی حد کے بڑھتا جاتا ہے حتیٰ کہ ط جب π کے مساوی ہوتا ہے تو ر کی قیمت نامتناہی بڑی ہوتی ہے ط کی قیمت جب π سے متجاوز ہو کر بڑھتی جاتی ہے تو ۱ + جم ط مسلسل بڑھتا جاتا ہے اور اس لیے ر بھی مسلسل گھٹتا جاتا ہے۔ یہاں تک کہ جب ط = ۲π تو ر کی قیمت ½ ل کے مساوی

ہو جاتی ہے۔ پس جیسا کہ شکل ۱۴۱ سے ظاہر ہے یہ منحنی سمت ا س میں لا تناہی



شکل ۱۴۱

تک چلا جاتا ہے۔

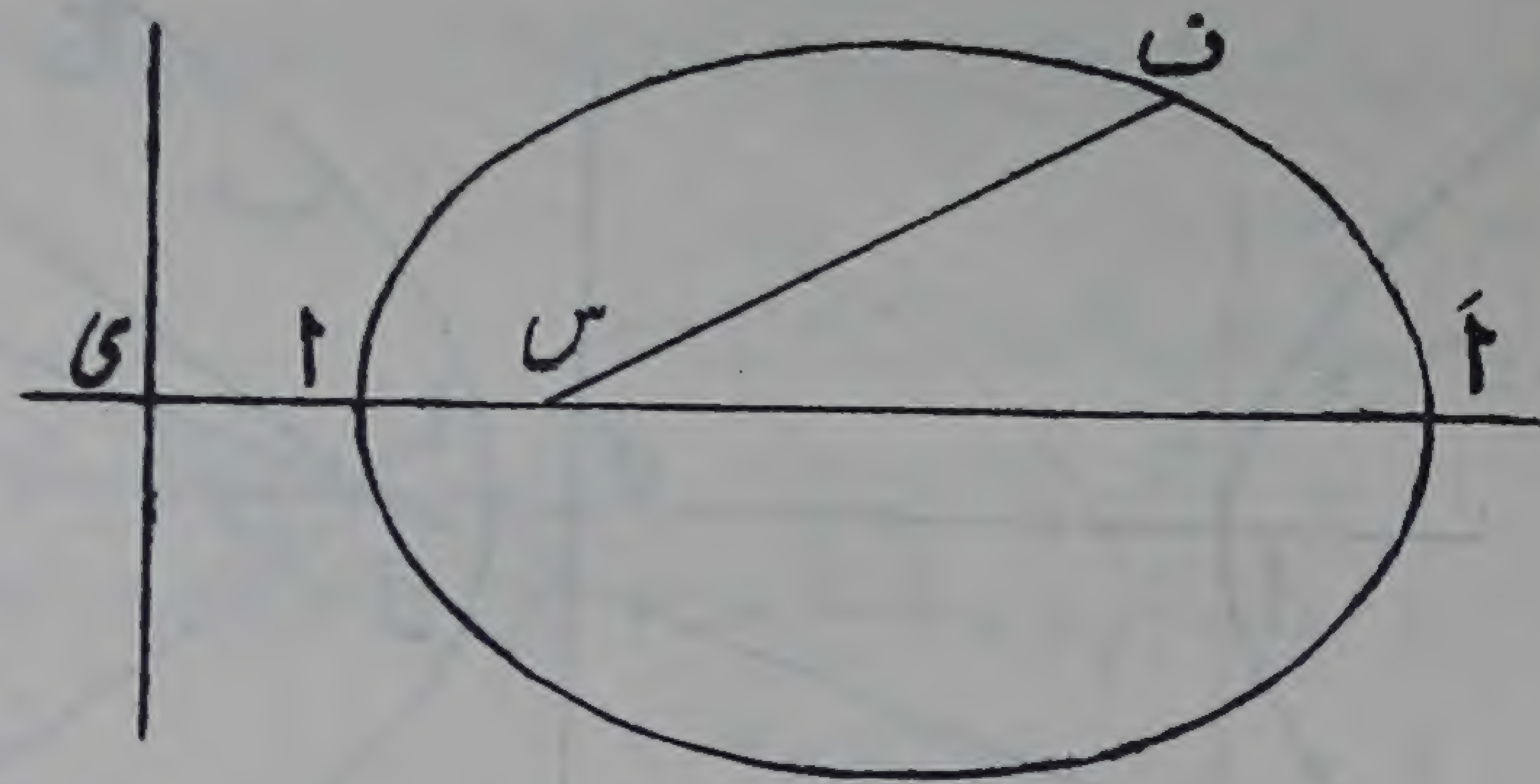
(۲) فرض کرو ز < ۱ تب منحنی قطع ناقص ہے۔

نقطہ ا پر طہ = ۰ اور سا = $\frac{لہ}{(۱+ز)}$

جیسے جیسے طہ بڑھتا ہے جم طہ گھٹتا ہے اور اس لیے $\frac{لہ}{سا}$ گھٹتا ہے یعنی سا بڑھتا ہے حتیٰ کہ طہ = π جبکہ سا = $\frac{لہ}{۱-ز}$ چونکہ ز < ۱ لہذا سا کی یہ قیمت مثبت ہے۔ پس منحنی محور کو دوبارہ کسی نقطہ اَ پر قطع کرتا ہے ایسا کہ س اَ = $\frac{لہ}{۱-ز}$

طہ کی قیمت π سے بڑھ کر جیسے جیسے ۲ π کے قریب پہنچتی ہے جم طہ مسلسل -۱ سے ۱ تک بڑھتا ہے۔ اس لیے $\frac{لہ}{سا}$ مسلسل بڑھتا ہے اور سا مسلسل $\frac{لہ}{۱-ز}$ سے گھٹ کر $\frac{لہ}{۱+ز}$ ہو جاتا ہے۔

چونکہ طہ کی کسی قیمت کے لیے بھی جم طہ = جم (۲π - طہ) یہ منحنی بلحاظ اپنے محور کے متشاکل ہے۔ پس جب ز کی قیمت اکائی سے کم ہوتی ہے تو مصرحۂ بالا مساوات ایک بند منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ابتدائی خط کے لحاظ سے متشاکل ہے۔



شکل ۴۲

(۳) فرض کرو ز > ۱ تب منحنی قطع زائد ہے۔

نقطہ ا پر طہ = ۰ اور س = $\frac{\text{ل}}{\text{۱+ز}}$ ۔

جیسے جیسے طہ بڑھتا ہے جم طہ گھٹتا ہے اور اس لیے س بڑھتا ہے یہاں تک کہ ۱ + ز جم طہ = ۰ طہ کی جب یہ قیمت ہوتی ہے تو ہم اس زاویہ کو عہ کہینگے (شکل ۴۳ میں یہ زاویہ ا س ک ہے) اور اس صورت میں س کی قیمت نامتناہی بڑی ہو جاتی ہے۔

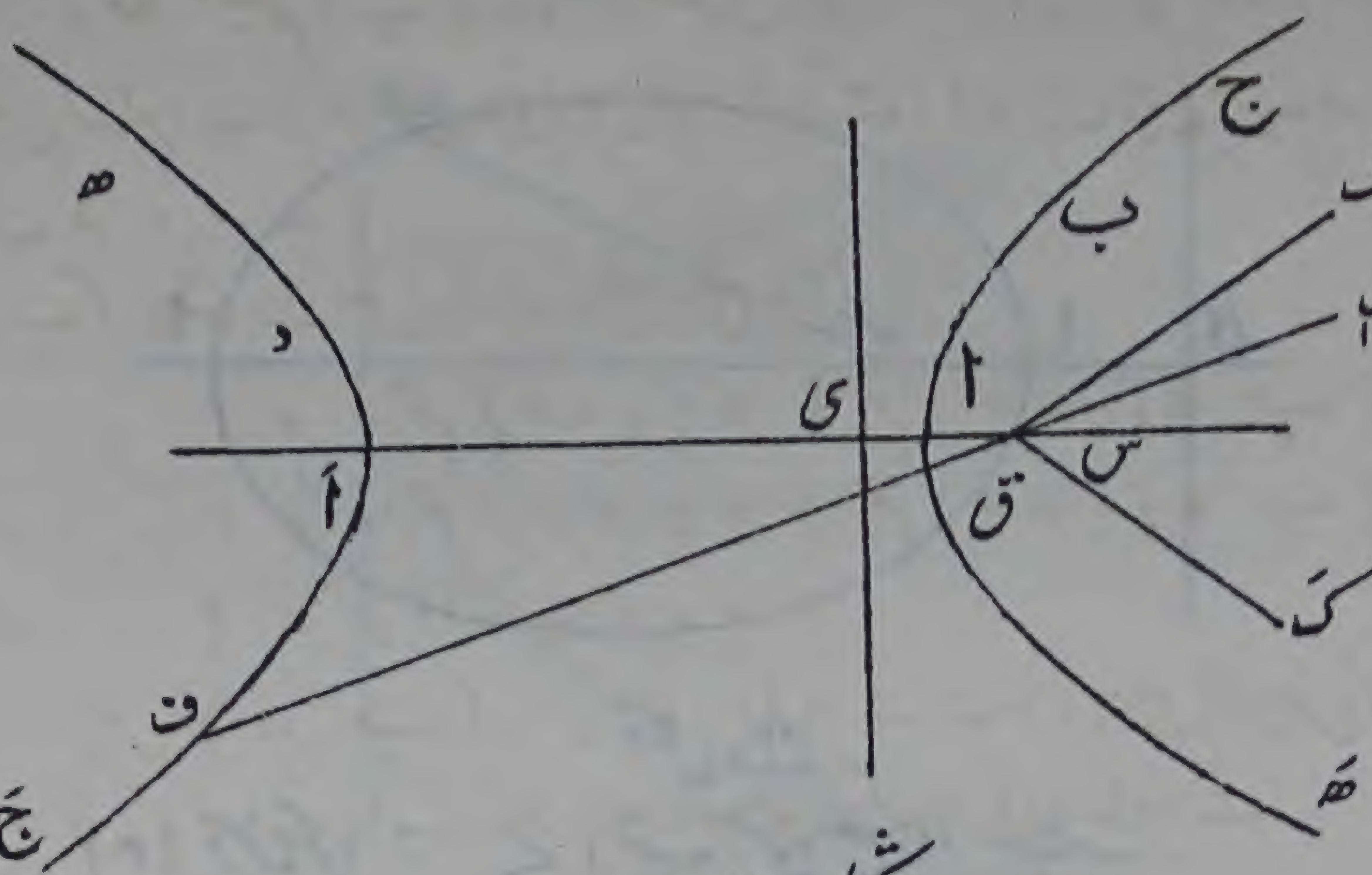
جب زاویہ طہ کی قیمت عہ سے متجاوز ہو کر بڑھتی جاتی ہے تو (۱ + ز جم طہ) منفی ہوتا ہے اور جب طہ = π تو س = - $\frac{\text{ل}}{\text{ز-۱}}$ = س اَ ۔

(۱ + ز جم طہ) منفی رہیگا تاوقتیکہ طہ = ۲π - عہ یعنی زاویہ ا س کَ ۔

جب زاویہ طہ = (۲π - عہ) تو س پھر نامتناہی بڑا ہوتا ہے۔ اگر طہ اس سے ذرا سا چھوٹا ہوتا ہے تو س بہت بڑا اور منفی ہوتا ہے اور اگر طہ ذرا سا بڑا ہوتا ہے تو س بہت بڑا اور مثبت ہوتا ہے۔ س کی قیمتیں مثبت رہینگی جبکہ زاویہ طہ کی قیمت (۲π - عہ) سے بدل کر ۲π ہوتی ہے۔

پس یہ منحنی مندرجہ ذیل ترتیب سے کھینچی جاتی ہے:- (دیکھو شکل ۴۳)
پہلے اس کا حصہ ا ب ج کھینچا جاتا ہے۔ اس کے بعد جَ فَ اَ پھر اَ د ھ اور سب سے آخر ہَ ق ا۔

یہ منحنی دو شاخوں یعنی ج ب ا ق ہَ اور جَ ف اَ د ھ پر مشتمل ہے۔ ان میں سے آخرالذکر سالم شاخ کے لیے نیم قطر سمتی منفی ہے۔



شکل ۴۳ء

اگر شکل ۴۳ء کی طرح، ایک خط س ق ف منحنی کو دو نقطوں ق اور ف میں قطع کرتا ہوا کھینچا جائے، جو منحنی کی مختلف شاخوں پر واقع ہیں، تو ان نقطوں ق اور ف کی نسبت یہ نہ خیال کرنا چاہیے کہ وہ ایک ہی زاویۂ سمتی رکھتے ہیں۔ نیم قطر سمتی س ف، منفی ہے یعنی خط س ف اس سمت کے مخالف سمت میں کھینچا گیا ہے جس سے اس کے زاویۂ سمتی کی حد بندی ہوتی ہے پس اگر ف س کو ف تک بڑھایا جائے تو زیر بحث زاویۂ سمتی ا س ف ہونا چاہیے۔ اس لیے اگر نقطہ ق کا زاویۂ سمتی طہ ہو تو نقطہ ف کا زاویہ سمتی طہ - π ہوگا۔

(د) کسی مخروطی پر کے کوئی سے دو نقطوں میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات کی تعیین اور اس کے ذریعہ مخروطی پر کے کسی نقطہ کے خطِ مماس کی مساوات

فرض کرو کہ ف اور ق نقطوں کے سمتی زاویے بالترتیب (عہ - بہ) اور (عہ + بہ) ہیں اور مخروطی کی مساوات ل/ر = ۱ + ز جم طہ .... (۱) ہے۔

خطِ مستقیم جس کی مساوات ل/ر = ا جم طہ + ب جم (طہ - عہ) ...... (۲) ہے کوئی سے دو نقطوں میں سے گزریگا اس لیے کہ اس کی مساوات میں دو باہمدگر غیر تابع مستقل ا اور ب شریک ہیں۔ اور ہم نے باب (۶) میں دیکھا ہے کہ خطِ مستقیم کی سادہ ترین قطبی مساوات ر جم (طہ - عہ) = ع ہے جس میں ع مبداء سے خط پر کھینچا ہوا عمود ہے۔

یہ خطِ مستقیم دیے ہوئے دو نقطوں ف اور ق میں سے گذریگا اگر ہ
کی قیمتیں مساوات (۲) میں وہی ہیں جو مساوات (۱) میں ہیں جب ط = عہ - بہ
اور جب ط = عہ + بہ۔
واضح ہے کہ یہ صورت اس وقت واقع ہوگی جبکہ

ا + زجم (عہ - بہ) = ا جم (عہ - بہ) + ب جم بہ

اور ا + زجم (عہ + بہ) = ا جم (عہ + بہ) + ب جم بہ

∴ ا = ز اور ب جم بہ = ا

پس ا اور ب کی ان قیمتوں کو مساوات (۲) میں تعویض کرنے سے
ف اور ق کو ملانے والے خط یعنی مخروطی کے وتر کی مساوات

لہ/ہ = زجم ط + قط بہ جم (ط - عہ) .... (۳) برآمد ہوتی ہے۔

لہذا مخروطی پر کے عہ زاویۂ سمتی والے نقطہ کے خطِ مماس کی مساوات دریافت کرنے کے لیے مساوات (۳) میں بہ = ۰ لکھنا چاہیے۔

پس اس کی مساوات لہ/ہ = زجم ط + جم (ط - عہ) .... (۴) ہے۔

نتیجۂ صریح ـــ اگر مخروطی کی مساوات لہ/ہ = ا + زجم (ط - جہ) مانی جائے تو (عہ - بہ) اور (عہ + بہ) نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات

لہ/ہ = زجم (ط - جہ) + قط بہ جم (ط - عہ) ہے

اور عہ زاویۂ سمتی والے نقطہ پر کے خطِ مماس کی مساوات

لہ/ہ = زجم (ط - جہ) + جم (ط - عہ) ہے۔

(ھ) مخروطی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی قطبی مساوات جبکہ ماسکہ قطب ہو۔

مخروطی کی مساوات لہ/ہ = ا + زجم ط مانو۔ اس کے زاویۂ سمتی عہ والے

نقطہ پر کے خط مماس کی مساوات ل/ر = زجم طہ + جم (طہ - عہ) ہے
اس خطِ مماس کے کسی علی القائم خط کی مساوات

ج/ر = زجم (طہ + π/۲) + جم (طہ + π/۲ - عہ)

یعنی ج/ر = زجب طہ - جب (طہ - عہ) ہے

یہ مساوات عماد کی مطلوبہ مساوات ہوگی بشرطیکہ ج اس طرح منتخب ہو کہ نقطہ جس کے قطبی محدد ل/(۱ + زجم عہ)، عہ ہیں اس خط پر واقع ہوں۔

پس چاہیے کہ ج (۱ + زجم عہ)/ل = -زجب عہ

یعنی ج = -ل زجب عہ/(۱ + زجم عہ)

∴ عماد کی مطلوبہ مساوات

(ل زجب عہ)/(۱ + زجم عہ) · ۱/ر = زجب طہ + جب (طہ - عہ) ہے

(و) کسی نقطہ سے بلحاظ ایک مخروطی کے قطبی کی قطبی مساوات

مخروطی کی مساوات ل/ر = ۱ + زجم طہ .... (۱) مانو
فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدد ر۱، طہ۱ ہیں اور مخروطی کے جن نقطوں پر کے مماس دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرتے ہیں ان کے سمتی زاویے عہ ± بہ ہیں۔ ان نقطوں میں سے گزرنے والے خط کی مساوات

ل/ر = زجم طہ + قط بہ جم (طہ - عہ) .... (۲) ہوگی

خطوطِ مماس کی مساواتیں

ل/ر = زجم طہ + جم (طہ - عہ + بہ)

اور ل/ر = زجم طہ + جم (طہ - عہ - بہ) ہونگی

چونکہ یہ نقطے (ر۱، طہ۱) میں سے گزرتے ہیں،

اس لیے ل/ر۱ = ز جم طہ۱ + جم (طہ۱ - عہ + بہ)

اور ل/ر۱ = ز جم طہ۱ + جم (طہ۱ - عہ - بہ)

پس طہ۱ = عہ اور جم بہ = ل/ر۱ - ز جم طہ۱

عہ اور بہ کی یہ قیمتیں مساوات (۲) میں تعویض کرنے سے

(ل/ر - ز جم طہ) (ل/ر۱ - ز جم طہ۱) = جم (طہ - طہ۱) ...... (۳)

جو مطلوبہ قطبی مساوات ہے۔

مثال (۱)۔ اگر مخروطی کے کسی نقطہ ف پر کا خطِ مماس مرتّب سے نقطہ ک پر ملے تو زاویہ ک س ف قائمہ ہے، جس میں س مخروطی کا ماسکہ ہے اگر نقطہ ف کا سمتی زاویہ عہ فرض کیا جائے تو ف پر کے خطِ مماس کی مساوات

ل/ر = ز جم طہ + جم (طہ - عہ) ہوگی

یہ خط مرتّب سے جس کی مساوات ل/ر = ز جم طہ ہے ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے جہاں جم (طہ - عہ) = ۰ پس واضح ہے کہ نقطہ ک پر طہ - عہ = ± $\frac{\pi}{2}$
اس لیے زاویہ ک س ف قائمہ ہے۔

مثال (۲)۔ مخروطی کے متقاربوں کی قطبی مساوات کی تعیین۔

مخروطی کی مساوات ل/ر = ۱ + ز جم طہ فرض کرو۔ مخروطی پر کے ایسے نقطہ کے خطِ مماس کی مساوات جس کا سمتی زاویہ عہ ہے،

ل/ر = ز جم طہ + جم (طہ - عہ) ...... (۱) ہے

اگر ر = ∞ تو ۰ = ۱ + ز جم عہ ...... (۲) اور ایسی صورت میں نقطۂ مذکور مخروطی پر لامتناہی پر کا نقطہ ہوگا۔

پس عہ کو (۱) اور (۲) مساواتوں میں سے ساقط کرنے سے مساوات

{ ز ل/ر + (۱ - ز^۲) جم ط }^۲ = ز^۲ جب^۲ ط جب^۲ ع = (ز^۲-۱) جب^۲ ط

حاصل ہوتی ہے جو مخروطی کے متقارب کی قطبی مساوات ہے۔

گیارہویں باب کی مثالیں

(۱) مکافی پر کے کسی دو خطوط مماس کا خارجی زاویہ ان کے نقاطِ تماس کے سمتی زاویوں کے تفاوت کا نصف ہے۔

(۲) کسی دیے ہوئے مکافی کے ایسے دو خطوط مماس کے نقطۂ تقاطع کا طریق جو باہدیگر ایک مستقل زاویہ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، ایک قطع زائد ہے جس کا ماسکہ اور مرتب دیے ہوئے مکافی کا ماسکہ اور مرتب ہے۔

(۳) اگر ف س فَ اور ق س قَ مخروطی کے کوئی سے دو ماسکی وتر باہدیگر علی القوائم ہوں تو ثابت کرو کہ ۱/(ف س × س فَ) + ۱/(ق س × س قَ) مستقل ہے۔

(۴) مخروطی کی قطبی مساوات کے ذریعہ سے ثابت کرو کہ ایسے نقطہ کا طریق جس کے فاصلوں کا حاصل جمع دو ثابت نقطوں سے مستقل ہے قطع ناقص ہے۔

(۵) اگر دو مخروطیوں کا ماسکہ مشترک ہے تو بتاؤ کہ ان کے دو مشترک وتر ان کے مرتبوں کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرینگے۔

(۶) مخروطی ل/ر = ۱ + ز جم ط کے دو باہدیگر علی القوائم خطوطِ مماس کے نقطۂ تقاطع کا طریق منحنی ر^۲ (ز^۲ - ۱) - ۲ ل ز ر جم ط + ۲ ل^۲ = ۰ ہے۔

(۷) ایک معین قطر کا دائرہ جو ایک دیے ہوئے مخروطی کے ماسکہ س میں سے گزرتا ہے مخروطی کو ا، ب، ج، د میں قطع کرتا ہے۔ بتاؤ کہ

س ا × س ب × س ج × س د مستقل ہے۔

(۸) ف و فَ اگر س ماسکہ والے مخروطی کے کسی ثابت نقطہ و میں سے گزرنے والا وتر ہو تو مس ½ فَ س و مس ½ ف س و مستقل ہوگا۔

(۹) مخروطی $\frac{\text{لہ}}{\text{ہا}}$ = ۱ + زجم طہ پر کے تین نقطوں کے سمتی زاویے عہ، بہ، جہ ہیں۔ ان نقطوں پر کے عماد نقطہ ہا، طہ۱ پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ

۲ طہ۱ = عہ + بہ + جہ

بارھواں باب

درجۂ دوم کی عام مساوات

۶۵ (ا) - درجۂ دوم کی عام مساوات پر بحث کرنے سے پہلے ہم یہ بتانا چاہتے ہیں کہ محوروں کی تبدیلی سے کسی مساوات کے درجہ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے -

صفحات ۱۳۸ و ۱۳۹ کے مطالعہ سے ظاہر ہے کہ محدّدوں کے مبدا کی تبدیلی اور محوروں کے گھماؤ کا اثر صرف اسی قدر ہوتا ہے کہ نئی مساوات میں بجائے محدّد لا اور ما کے مصرحۂ ذیل کی نوعیت کے جملے استعمال کیے جاتے ہیں:

ل لاَ + م ماَ + ن اور لَ لاَ + مَ ماَ + نَ

یہ جملے پہلے ہی درجے کے ہیں اس لیے اگر وہ کسی مساوات میں بجائے لا اور ما کے لکھے جائیں تو واضح ہے کہ مساوات کا درجہ بلند تر نہیں ہوگا - یہ درجہ کمتر بھی اس لیے نہیں ہوگا کہ اگر بالفرض وہ کمتر ہوتا تو اسی استدلال سے مستنبط ہوتا ہے کہ ابتدائی محوروں پر عود کر آنے سے اور اس لیے ابتدائی مساوات پر واپس جانے سے مساوات کا درجہ بلند تر ہو جاتا ہے لیکن ایسا نہیں ہوتا ہے - پس محوروں کی تبدیلی سے مساوات کے درجہ میں کسی قسم کی تبدیلی نہیں ہونے پاتی -

(ب) ہر ایسا منحنی جس کی مساوات دوسرے درجہ کی ہو تراشِ مخروط ہے -

ہم فرض کر سکتے ہیں کہ منحنی کے محدّدوں کے محور باہمدگر علی القوائم ہیں -

اس لیے کہ اگر مساوات مائل محوروں سے متعلق ہو تو بھی ہم اس کو علی القوائم محوروں کی رقموں میں بدل سکتے ہیں اور اس تبدیلی سے مساوات کا درجہ غیر متغیر رہتا ہے۔ جیسا کہ ابھی ثابت کیا گیا۔

ہم منحنی کی مساوات ا لا² + ۲ ح لا ما + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ..... (۱)

فرض کرتے ہیں جو دوسرے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل ہے۔

اگر محوروں کو ایک معین زاویہ میں گھما دیں تو مساوات میں سے لا ما والی رقم خارج ہو سکتی ہے۔ اس لیے کہ محوروں کو زاویہ طہ میں گھمانے کے لیے بجائے لا اور ما کے علی الترتیب لا جم طہ - ما جب طہ اور لا جب طہ + ما جم طہ لکھنا پڑتا ہے (ملاحظہ ہو صفحہ ۱۳۹)۔

اس تعویض سے مساوات (۱) بصورت

ا (لا جم طہ - ما جب طہ)² + ۲ ح (لا جم طہ - ما جب طہ) (لا جب طہ + ما جم طہ) + ب (لا جب طہ + ما جم طہ)²
+ ۲ گ (لا جم طہ - ما جب طہ) + ۲ ف (لا جب طہ + ما جم طہ) + ج = ۰ ..... (۲)

تبدیل ہو جاتی ہے جس میں لا ما کا سر ۲ (ب - ا) جب طہ جم طہ + ۲ ح (جم² طہ - جب² طہ) ہے

اور وہ صفر ہو جاتا ہے جبکہ مس ۲ طہ = ۲ ح / (ا - ب) .... (۳)

چونکہ ایسا زاویہ جس کا مماس کوئی سی حقیقی مقدار ہو دریافت ہو سکتا ہے

لہذا زاویہ طہ = ½ مس⁻¹ (۲ ح / (ا - ب)) تمام صورتوں میں حقیقی ہے۔

پس مساوات (۲) کو بشکل

ا لا² + ب ما² + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰ ..... (۴)

لکھ سکتے ہیں۔

اگر نہ تو ا صفر ہے یا نہ ب تو مساوات (۴) کو مندرجۂ ذیل شکل میں ڈھال سکتے ہیں:—

ا (لا + گ/ا)² + ب (ما + ف/ب)² = گ²/ا + ف²/ب - ج = ک

اگر نقطہ $\left(-\frac{\text{گ}}{\text{ا}}\text{، } -\frac{\text{ف}}{\text{ب}}\right)$ پر مبداء منتقل کیا جائے تو مساوات

$$\text{ا لا}^{2} + \text{ب ما}^{2} = \text{ک} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\text{۵})$$

ہو جاتی ہے۔

اگر بائیں جانب کی رقم (یعنے ک) = ۰ تو مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کریگی (صفحہ ۱۳۱) لیکن اگر ک صفر نہ ہو تو مساوات

$$\frac{\text{لا}^{2}}{\frac{\text{ک}}{\text{ا}}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\frac{\text{ک}}{\text{ب}}} = \text{۱}$$

ہو جاتی ہے،

جو قطع ناقص کو تعبیر کرتی ہے اگر دونوں نسب نما مثبت ہوں اور قطع زائد کو اگر ایک نسب نما مثبت ہو اور دوسرا منفی۔

اگر دونوں نسب نما منفی ہوں تو واضح ہے کہ لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں مندرجۂ بالا مساوات کے لئے صادق نہیں آسکتیں۔ اس صورت میں منحنی ایک خیالی ناقص کی تعبیر کریگا۔

اگر ا اور ب مساوی ہوں تو ب = ا لکھنے سے مساوات $\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = \frac{\text{ک}}{\text{ا}}$ جو ایک دائرہ کی مساوات ہے۔

اس کے بعد مساوات (۴) میں ا یا ب کو صفر مانو۔ ۶۵ (ا) کی رو سے ا اور ب دونوں وقتِ واحد میں صفر نہیں ہو سکتے۔ فرض کرو کہ ا صفر ہے۔ تب مساوات مذکور بشکل

$$\text{ب}\left(\text{ما} + \frac{\text{ف}}{\text{ب}}\right)^{2} = -\text{۲گ لا} - \text{ج} + \frac{\text{ف}^{2}}{\text{ب}} \quad \ldots\ldots \quad (\text{۶})$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اب اگر گ = ۰ تو مساوات دو متوازی خطوط کو تعبیر کرتی ہے جو اگر گ = ۰ کے ساتھ $\text{ف}^{2} - \text{ب ج} = \text{۰}$ بھی ہو تو باہمدیگر منطبق ہوتے ہیں۔ اگر گ صفر نہ ہو تو مساوات بشکلِ ذیل لکھی جاسکتی ہے:-

$$\left(\text{ما} + \frac{\text{ف}}{\text{ب}}\right)^{2} = -\frac{\text{۲گ}}{\text{ب}}\left(\text{لا} - \frac{\text{ف}^{2}}{\text{۲ب گ}} + \frac{\text{ج}}{\text{۲گ}}\right)$$

جو ایک قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور لا کے محور کے متوازی ہے۔

پس ہر صورت میں دوسرے درجہ کی مساوات کا منحنی تراشِ مخروط ہے۔

(ج) تراشِ مخروط کے مرکز کے محددین کی دریافت، درجۂ دوم کی عام مساوات کو مان کر۔ نویں باب کے شروع میں ہم نے دیکھا ہے کہ جب محددین کا مبداء تراشِ مخروط کا مرکز ہوتا ہے تو اس کی مساوات میں لا اور ما کی پہلی قوت کی رقمیں نہیں پائی جاتی ہیں۔

پس عام مساوات کے ذریعہ تراشِ مخروط کا مرکز معلوم کرنے کے لیے مبداء کو کسی ایسے نقطہ (لاَ، ماَ) میں تبدیل کرنا پڑتا ہے جس کی وجہ سے لا اور ما کے سر صفر ہوجاتے ہیں۔

پس مساوات ا لا^{۲} + ۲ح لا ما + ب ما^{۲} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ کو نقطہ لاَ، ماَ میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے ذریعہ ظاہر کرنے کے لیے لا کے عوض لا + لاَ اور ما کے عوض ما + ماَ لکھنا پڑتا ہے جس کی وجہ سے مساوات

ا(لا + لاَ)^{۲} + ۲ح (لا + لاَ) (ما + ماَ) + ب (ما + ماَ)^{۲}

+ ۲گ (لا + لاَ) + ۲ف (ما + ماَ) + ج = ۰

یعنے ا لا^{۲} + ۲ح لا ما + ۲لا (ا لاَ + ح ماَ + گ) + ۲ما (ح لاَ + ب ماَ + ف)

+ ا لاَ^{۲} + ۲ح لاَ ماَ + ب ماَ^{۲} + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج = ۰ ہوجاتی ہے

اور اس میں لا اور ما دونوں کے سر صفر ہوجاتے ہیں بشرطیکہ لاَ اور ماَ کا انتخاب اس طرح پر ہو کہ　ا لاَ + ح ماَ + گ = ۰ .... (۱)

اور　ح لاَ + ب ماَ + ف = ۰ .... (۲)

پس مبداء (لاَ، ماَ) کے حوالہ سے مساوات

ا لا^{۲} + ۲ح لا ما + ب ما^{۲} + جَ = ۰ ...... (۳)

ہوگی جس میں جَ = ا لاَ^{۲} + ۲ح لاَ ماَ + ب ماَ^{۲} + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج .... (۴)

اس لیے تراشِ مخروط کے مرکز کے محدد لاَ اور ماَ کی وہ قیمتیں ہیں جو (۱) اور (۲) مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

∴ مرکز نقطہ $\left(\frac{\text{ح ف - ب گ}}{\text{اب - ح}^2} \text{ ، } \frac{\text{گ ح - اف}}{\text{اب - ح}^2} \right)$ ہے

جب اب - ح² = ۰ تو مرکز کے محددّ نا متناہی ہوتے ہیں یعنے مرکز لا تناہی پر واقع ہوتا ہے اور اس لیے منحنی قطع مکافی ہے - لیکن جب ح ف - ب گ اور اب - ح² = ۰ یعنے

$$\frac{\text{ا}}{\text{ح}} = \frac{\text{ح}}{\text{ب}} = \frac{\text{گ}}{\text{ف}}$$

تو (۱) اور (۲) مساواتیں ایک ہی خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہیں اور اس خط کا کوئی نقطہ منحنی کا ایک مرکز ہے پس اس صورت میں مرکز کا طریق دو متوازی خطوطِ مستقیم ہے۔ واضح ہو کہ مندرجۂ بالا بحث میں محور خواہ علی القوائم ہو سکتے ہیں یا مائل۔

(د) درجۂ دوم کی عام مساوات سے دو خطوطِ مستقیم کی تعبیر۔

تراشِ مخروط کے مرکز کے محددوں کی مساواتوں (۱) اور (۲) کو علی الترتیب لاَ اور ماَ سے ضرب دو تو

ا لاَ² + ح لاَ ماَ + گ لاَ = ۰

ح لاَ ماَ + ب ماَ + ف ماَ = ۰

ان کو باہمدیگر جمع کرنے سے

ا لاَ² + ۲ح لاَ ماَ + ب ماَ² + گ لاَ + ف ماَ = ۰

اس کو مساوات (۴) یعنے ا لاَ² + ۲ح لاَ ماَ + ب ماَ² + ۲گ لاَ + ۲ف ماَ + ج = جَ میں سے وضع کرنے سے

جَ = گ لاَ + ف ماَ + ج .... (۵)

اس مساوات میں لاَ اور ماَ کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\text{جَ} = \text{گ} \frac{\text{ح ف - ب گ}}{\text{اب - ح}^2} + \text{ف} \frac{\text{گ ح - اف}}{\text{اب - ح}^2} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{اب ج + ۲ف گ ح - اف}^2 \text{ - ب گ}^2 \text{ - ج ح}^2}{\text{اب - ح}^2}$$

جملہ ا ب ج + ۲ ف گ ح - ا ف٢ - ب گ٢ - ج ح٢ عموماً △ سے تعبیر کیا جاتا ہے
اور جملہ ا لا٢ + ٢ ح لا ما + ب ما٢ + ٢ گ لا + ٢ ف ما + ج کا ممیّز کہلاتا ہے۔
جب ممیز △ = ۰ تو ج = ۰ اور عام مساوات کا استحالہ ا لا٢ + ٢ ح لا ما + ب ما٢ = ۰ میں ہوتا ہے جو دو خطوطِ مستقیم کی مساوات ہے۔ پس △ = ۰ تراشِ مخروط کے دو خطوطِ مستقیم میں تحویل ہونے کی شرط ہے۔ صفحہ ۱۳۲ پر ہم نے یہی شرط ایک دوسرے طریقہ سے دریافت کی تھی۔ اوپر جو کچھ کہ بیان کیا گیا ہے مائل محدّدوں کے لیے بھی صادق آتا ہے۔

(ھ) تراشِ مخروط ا لا٢ + ٢ ح لا ما + ب ما٢ = ١ کے محوروں کی وضع و مقدار کی تعیین۔

اگر کسی تراشِ مخروط کو کوئی ہم مرکز دائرہ قطع کرتا ہے تو نقاطِ تقاطع میں سے گزرنے والے قطر اس تراشِ مخروط کے محوروں کے ساتھ مساوی زاویوں میں مائل ہونگے۔ اور باہمدیگر منطبق ہونگے۔ اگر دائرہ کا نصف قطر تراشِ مخروط کے دو نصف محوروں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو۔

چونکہ تراشِ مخروط کی مساوات ا لا٢ + ٢ ح لا ما + ب ما٢ = ١ مانی گئی ہے

اور ہم مرکز دائرہ کی مساوات لا٢ + ما٢ = ص٢ یعنی لا٢/ص٢ + ما٢/ص٢ = ١ ہے۔

پس مبدا اور تراشِ مخروط و دائرہ کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرنے والے خطوط کی مساوات

ا لا٢ + ٢ ح لا ما + ب ما٢ = لا٢/ص٢ + ما٢/ص٢ ہے

یعنی (ا - ١/ص٢) لا٢ + ٢ ح لا ما + (ب - ١/ص٢) ما٢ = ۰ ..... (١)

اور یہ خطوط باہمدیگر منطبق ہونگے اگر (ا - ١/ص٢)(ب - ١/ص٢) = ح٢ ..... (٢)

ایسی حالت میں یہ خطوط نہ صرف آپس میں منطبق ہونگے بلکہ تراشِ مخروط کے دو محوروں میں سے کسی ایک محور کے ساتھ بھی منطبق ہونگے۔

پس مساوات (۲) کو حل کرنے سے تراشِ مخروط کے نصف محوروں کے طول (ص) کی تعیین ہو سکتی ہے۔مساوات مذکور

$$\frac{1}{\text{ص}^4} - (\text{ا}+\text{ب})\frac{1}{\text{ص}^2} + \text{اب} - \text{ح}^2 = 0 \quad \ldots\ldots (۳)$$

اور

$$\frac{1}{\text{ص}^2} = \frac{(\text{ا}+\text{ب}) \pm \sqrt{(\text{ا}+\text{ب})^2 - 4(\text{اب} - \text{ح}^2)}}{2}$$

$$= \frac{(\text{ا}+\text{ب}) \pm \sqrt{(\text{ا}-\text{ب})^2 + 4\text{ح}^2}}{2}$$

اب مساوات (۱) کو $\left(\text{ا} - \frac{1}{\text{ص}^2}\right)$ سے ضرب دو۔تو

$$\left(\text{ا}-\frac{1}{\text{ص}^2}\right)^2 \text{لا}^2 + 2\text{ح}\left(\text{ا}-\frac{1}{\text{ص}^2}\right)\text{لاما} + \left(\text{ا}-\frac{1}{\text{ص}^2}\right)\left(\text{ب}-\frac{1}{\text{ص}^2}\right)\text{ما}^2 = 0$$

اگر $\frac{1}{\text{ص}^2}$ مساوات (۲) کی دو اصلوں میں سے کوئی ایک اصل ہے تو

$$\left(\text{ا}-\frac{1}{\text{ص}^2}\right)^2 \text{لا}^2 + 2\text{ح}\left(\text{ا}-\frac{1}{\text{ص}^2}\right)\text{لاما} + \text{ح}^2\text{ما}^2 = 0$$

$$\therefore \left(\text{ا}-\frac{1}{\text{ص}^2}\right)\text{لا} + \text{ح}\,\text{ما} = 0 \quad \ldots\ldots (۴)$$

پس اگر مساوات (۴) میں مساوات (۳) کی دو اصلوں میں سے کوئی ایک اصل تعویض کی جائے تو اس کے متناظر محور کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

(و) درجۂ دوم کی عام مساوات سے قطع مکافی کے محور اور وترِ خاص کی تعیین۔

اگر مساوات $\text{ا}\,\text{لا}^2 + 2\text{ح}\,\text{لاما} + \text{ب}\,\text{ما}^2 + 2\text{گ}\,\text{لا} + 2\text{ف}\,\text{ما} + \text{ج} = 0$ ایک قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے تو دوم درجہ کی رقمیں مل کر ایک کامل مربع بناتی ہیں۔ ملاحظہ ہو صفحہ (۱۸۲) لہٰذا یہ مساوات

(عہ لا + بہ ما)^{۲} + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ ...... (۱)

کے معادل ہے۔ جس میں عہ^{۲} = ا اور بہ^{۲} = ب

مساوات (۱) پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ خط عہ لا + بہ ما = ۰ پر کے عمود کا مربع خط ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ پر کے عمود کے متناسب ہے۔ ممکن ہے کہ یہ خطوط باہمدیگر علی القوائم نہ ہوں۔ لیکن ہم مساوات (۱) کو بشکل

(عہ لا + بہ ما + لہ)^{۲} = ۲ لہ (عہ لا + بہ ما) + لہ^{۲} − (۲گ لا + ۲ف ما + ج)

یعنی (عہ لا + بہ ما + لہ)^{۲} = ۲ لا (لہ عہ − گ) + ۲ ما (لہ بہ − ف) + لہ^{۲} − ج

لکھ سکتے ہیں اور خطِ مستقیم جس کی مساوات عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ ہے مساوات ۲ لا (لہ عہ − گ) + ۲ ما (لہ بہ − ف) + لہ^{۲} − ج = ۰ والے خطِ مستقیم کے علی القوائم واقع ہوتا ہے اگر عہ (لہ عہ − گ) + بہ (لہ بہ − ف) = ۰

$$\text{یعنی} \quad \text{لہ} = \frac{(\text{عہ گ} + \text{بہ ف})}{\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲}}$$

پس اب خطوط عہ لا + بہ ما + لہ = ۰

اور ۲ (عہ لہ − گ) لا + ۲ (بہ لہ − ف) ما + لہ^{۲} − ج = ۰ کو علی الترتیب لا اور ما کے محور مانو تو ہمیں ما^{۲} = ۴پ لا کے مماثل مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اور واضح ہے کہ یہ مساوات قطع مکافی کی ہے جس کے محددوں کے محور، منحنی کا محور اور منحنی کے راس پر کا خطِ مماس ہیں۔

وتر خاص ۴پ کی تعیین کے لیے ہم خط عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ پر کے عمود

$$\frac{\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}}{\sqrt{\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲}}} \quad \text{کو ما تصور کرتے ہیں}$$

اور خط ۲ (عہ لہ − گ) لا + ۲ (بہ لہ − ف) ما + لہ^{۲} − ج = ۰ پر کے عمود

$$\frac{۲\,(\text{عہ لہ} - \text{گ})\,\text{لا} + ۲\,(\text{بہ لہ} - \text{ف})\,\text{ما} + \text{لہ}^{۲} - \text{ج}}{\sqrt{۴\,(\text{عہ لہ} - \text{گ})^{۲} + ۴\,(\text{بہ لہ} - \text{ف})^{۲}}} \quad \text{کو لا تصور کرتے ہیں۔}$$

$$\text{پس} \left(\frac{\text{عہ لہ} + \text{بہ ما} + \text{لہ}}{\sqrt{\text{عہ}^{۲} + \text{بہ}^{۲}}}\right)^{۲} = ۴\text{پ} \left\{\frac{۲\,(\text{عہ لہ} - \text{گ})\,\text{لا} + ۲\,(\text{بہ لہ} - \text{ف})\,\text{ما} + \text{لہ}^{۲} - \text{ج}}{\sqrt{۴\,(\text{عہ لہ} - \text{گ})^{۲} + ۴\,(\text{بہ لہ} - \text{ف})^{۲}}}\right\}$$

∴ ۴ پ = √(۴ (عہ لہ - گ)^۲ + ۴ (بہ لہ - ف)^۲) / (عہ^۲ + بہ^۲)

اور اس لیے مساوات (۱) یعنے (عہ لا + بہ ما)^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰
ایک قطع مکافی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور عہ لا + بہ ما + لہ = ۰ ہے اور جس کا وترِ خاص

۲ √((عہ لہ - گ)^۲ + (بہ لہ - ف)^۲) / (عہ^۲ + بہ^۲) = ۲ (عہ ف - بہ گ) / (عہ^۲ + بہ^۲)^{۳/۲} ہے

اس لیے کہ لہ = (عہ گ + بہ ف) / (عہ^۲ + بہ^۲)

ذیل میں ہم نمونۃً چند سوالات کو حل کر کے بتاتے ہیں کہ درجۂ دوم کی مساوات سے تراشِ مخروط کی نوعیت، وضع، وغیرہ کیونکر دریافت ہو سکتی ہے۔

مثال (۱) ۱۷ لا^۲ - ۱۲ لا ما + ۸ ما^۲ - ۶۸ لا + ۲۴ ما - ۱۲ = ۰

منحنی کے مرکز کے محدد لاَ، ماَ دریافت کرنے کے لیے ذیل کے ضابطے استعمال ہوتے ہیں:

ا لاَ + ح ماَ + گ = ۰ اور ح لاَ + ب ماَ + ف = ۰

پس ۱۷ لاَ - ۶ ماَ - ۳۴ = ۰ اور - ۶ لاَ + ۸ ماَ + ۱۲ = ۰

ان کو حل کرنے سے مرکز کے محددوں کی قیمتیں لاَ = ۲ اور ماَ = ۰ حاصل ہوتی ہیں۔
مرکز میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے حوالہ سے منحنی کی مساوات
۱۷ لا^۲ - ۱۲ لا ما + ۸ ما^۲ + جَ = ۰ ہے جس میں جَ = گ لاَ + ف ماَ + ج
یعنے مساوات ۱۷ لا^۲ - ۱۲ لا ما + ۸ ما^۲ - ۸۰ = ۰ ہے۔

اس کو (۱۷/۸۰) لا^۲ - (۱۲/۸۰) لا ما + ما^۲/۱۰ = ۱ لکھ سکتے ہیں

یعنے (۱۷/۸۰) لا^۲ - (۳/۲۰) لا ما + ما^۲/۱۰ = ۱

پس تراشِ مخروط کے نصف محور مساوات ۱/ص⁴ − (ا + ب) ۱/ص² + اب − ح² = ۰ کی اصلیں ہیں۔

یعنے ۱/ص⁴ − (۱۷/۸۰ + ۱/۱۰) ۱/ص² + ۱۷/۸۰۰ − ۹/۱۶۰۰ = ۰ کی اصلیں

∴ ۱/ص⁴ − ۵/۱۶ · ۱/ص² + ۱/۶۴ = ۰ یعنے ص⁴ − ۲۰ ص² + ۶۴ = ۰

∴ ص² = ۱۶ یا ۴ اور مساوات لا²/۱۶ + ما²/۴ = ۱

∴ تراشِ مخروط قطع ناقص ہے جس کے نصف محوروں کی قیمت ۴ اور ۲ ہے۔
ان محوروں کی سمتیں معلوم کرنے کے لیے مساوات (ا − ۱/ص²) لا + ح ما = ۰ استعمال کرنے سے اعظم محور کی مساوات (۱۷/۸۰ − ۱/۱۶) لا − ۶ما/۸۰ = ۰ حاصل ہوتی ہے جس سے ما = ۲ لا یعنے م = ۲

اور اقل محور کی مساوات (۱۷/۸۰ − ۱/۴) لا − ۶ما/۸۰ = ۰ جس سے ما = − ۱/۲ لا
یعنے م = − ۱/۲

مثال (۲) ۴ لا² − ۸ لا ما + ۴ ما² + ۶ لا − ۸ ما + ۱ = ۰

اس مساوات میں دوسرے درجہ کی رقموں سے ایک کمل مربع بنتا ہے۔

پس (۲لا − ۲ما)² + ۶لا − ۸ما + ۱ = ۰

لہذا (۲لا − ۲ما + ل)² = ۴(لا − ما) ل + ل² − ۶لا + ۸ما − ۱

= ۲لا (۲ل − ۳) − ۴ما (ل − ۲) + ل² − ۱

خطوط (۲لا − ۲ما + ل) = ۰ اور ۲لا (۲ل − ۳) − ۴ما (ل − ۲) + ل² − ۱ = ۰
باہمدیگر علی القوائم ہونگے اگر ۲ (۴ل − ۶) + ۲ (۴ل − ۸) = ۰
یعنے اگر ل = ۷/۴

∴ (۲لا − ۲ما + ۷/۴)² = ۲لا (۷/۲ − ۳) − ۴ما (۷/۴ − ۲) + ۴۹/۱۶ − ۱

(۸لا - ۸ما + ۷)^{۲} = ۱۶لا + ۱۶ما + ۳۳

قطع مکافی کی مساوات ما^{۲} = ۴ پ لا ہے جبکہ ما قطع مکافی کے کسی نقطہ کا منحنی کے محور سے عمودی فاصلہ ہے اور لا راس پر کے مماس سے اسی نقطہ کا عمودی فاصلہ۔

پس $\left(\frac{\text{۸لا + ۸ما + ۷}}{\sqrt{\text{۸}^{۲} + \text{۸}^{۲}}}\right)^{۲}$ = ۴ پ لا $\frac{\text{(۱۶لا + ۱۶ما + ۳۳)}}{\sqrt{\text{۱۶}^{۲} + \text{۱۶}^{۲}}}$

یعنے $\left(\frac{\text{۸لا + ۸ما + ۷}}{\text{۸}\sqrt{۲}}\right)^{۲}$ = ۴ پ لا $\frac{\text{۱۶لا + ۱۶ما + ۳۳}}{\text{۱۶}\sqrt{۲}}$

∴ ۴ پ = ۲ یعنے وترِ خاص کی قیمت ۲ ہے -

۸لا - ۸ما + ۷ = ۰ قطع مکافی کے محور کی مساوات ہے اور ۱۶لا + ۱۶ما + ۳۳ = ۰ منحنی کے راس پر کے مماس کی مساوات ہے - ان خطوں کے مشترک نقطہ کے محدد راس کے محدد ہیں - پس ان کو حل کرنے سے لا کی قیمت - $\frac{۴۷}{۳۲}$ اور ما کی قیمت - $\frac{۱۹}{۳۲}$ برآمد ہوتی ہے - اور یہی راس کے محدد ہیں -

مثال (۳) ۷لا^{۲} - ۱۷لاما + ۶ما^{۲} + ۲۳لا - ۲ما - ۲۰ = ۰

مرکز کی تعیین کی مساواتیں ۱۴لاَ - ۱۷ماَ + ۲۳ = ۰ اور - ۱۷لاَ + ۱۲ماَ - ۲ = ۰ ہیں - ان مساواتوں کو حل کرنے سے لاَ = ۲ اور ماَ = ۳ حاصل ہوتے ہیں - پس منحنی کا مرکزِ نقطہ (۲ ، ۳) ہے -

اس مرکز میں سے گزرنے والے سابقہ محوروں کے متوازی محوروں کے حوالے سے منحنی کی مساوات

۷لا^{۲} - ۱۷لاما + ۶ما^{۲} + $\frac{۲۳}{۲}$ × ۲ - ۱ × ۳ - ۲۰ = ۰ ہے

یعنے ۷لا^{۲} - ۱۷لاما + ۶ما^{۲} = ۰

اس لیے یہ مساوات دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ (۲ ، ۳) پر متقاطع ہوتے ہیں - اگر ابتدائی مساوات میں ما کو صفر لکھیں تو مساوات ۷لا^{۲} + ۲۳لا - ۲۰ = ۰ حاصل ہوتی ہے - پس محولہ بالا دو خطوط لا کے محور کو ایسے مقاموں پر قطع کرتے ہیں جہاں

۷لا^{۲} + ۲۳لا - ۲۰ = ۰ یعنے جہاں لا = - ۴ اور لا = $\frac{۵}{۷}$

(۴) لا^{۲} - ۵لاما + ما^{۲} + ۸لا - ۲۰ما + ۱۵ = ۰

منحنی کے مرکز کے محدّدوں (لاَ ، ماَ) کی تعیین

۲لاَ - ۵ماَ + ۸ = ۰ اور ۵لاَ + ۲ماَ - ۲۰ = ۰ سے ہوتی ہے

∴ لاَ = -۴ اور ماَ = ۰

مرکز میں سے گزرنے والے ابتدائی محوروں کے متوازی محوروں کے حوالہ سے تراشِ مخروط کی مساوات

لا² - ۵لاما + ما² - ۴ (-۴) + ۱۵ = ۰ یعنی لا² - ۵لاما + ما² = ۱ ہے

اس تراشِ مخروط کے نصف محور مساوات ۱/ص⁴ - ۲/ص² + ۱ - ۲۵/۴ = ۰ کی اصلیں ہیں۔

اس کو حل کرنے سے ص² = ۲/۷ یا -۲/۳ جس سے ص = ۱/۷ √۱۴ یا ۱/۳ √-۶

چونکہ ایک نصف محور خیالی ہے اس لیے تراشِ مخروط قطع زائد ہے۔

اس کی حقیقی محور کی سمت مساوات (۱ - ۷/۲) لا - ۵/۲ ما = ۰ یعنی لا + ما = ۰ سے حاصل ہوتی ہے۔

(ز) دوم درجہ کی عام مساوات سے قطع زائد کے متقاربوں کی تعیین۔

صفحہ (۲۲۲) پر بتایا گیا ہے کہ قطع زائد اور اس کے متقاربوں کی مساواتوں میں صرف ایک مستقل کا فرق ہے۔

پس جب ا لا² + ۲ح لاما + ب ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج = ۰ ..... (۱)

تراشِ مخروط کی مساوات ہے۔

تو ا لا² + ۲ح لاما + ب ما² + ۲گ لا + ۲ف ما + ج + لہ = ۰ ..... (۲)

اس کے متقاربوں کی مساواتیں ہونگی۔

بشرطیکہ لہ کو ایسی قیمت دی جائے جس کی وجہ سے مساوات (۲) دو خطوطِ مستقیم کو تعبیر کرے۔

اس کے لیے مساوات کو محض لا کی دو درجی مساوات تصور کر کے اس کو حل کرتے ہیں ملاحظہ ہو صفحہ (۱۳۳)۔

چنانچہ ا لا² + لا (۲ح ما + ۲گ) + (ب ما² + ۲ف ما + ج + لہ) = ۰

∴ لا = [-(۲ح ما + ۲گ) ± √((۲ح ما + ۲گ)² - ۴ا (ب ما² + ۲ف ما + ج + لہ))] / ۲ا

پس $ا لا + ح ما + گ = \sqrt{ح^۲ ما^۲ + گ^۲ + ۲ گ ح ما - (اب ما^۲ + ۲ اف ما + اج + الہ)}$

$= \sqrt{ما^۲ (ح^۲ - اب) + ۲ (ح گ - اف) ما + گ^۲ - اج - الہ}$

یہ مساوات $۲ لا + ب ما + ج = ۰$ کی شکل میں تحویل ہونے کے لیے ضروری اور کافی ہوگا کہ جذرالمربع کی علامت کے نیچے کی مقدار کامل مربع ہو۔ اس کے لیے شرط یہ ہے کہ

$$(ح^۲ - اب)(گ^۲ - اج - الہ) = (ح گ - اف)^۲$$

اس کو پھیلا کر ا پر تقسیم کرنے سے

$$لہ (ح^۲ - اب) = اب ج + ۲ ف گ ح - اف^۲ - ب گ^۲ - ج ح^۲$$

مساوات کے بائیں جانب کا جملہ ممیّز کہلاتا ہے اور $\triangle$ سے تعبیر ہوتا ہے۔ پس

$$\triangle + لہ (اب - ح^۲) = ۰ \quad \text{اس لیے} \quad لہ = - \frac{\triangle}{اب - ح^۲}$$

لہٰذا دوسرے درجہ کی عام مساوات والے قطع زائد کے متقاربوں کی مساواتیں حسبِ ذیل مساوات میں شامل ہیں:

$$ا لا^۲ + ۲ ح لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج - \frac{\triangle}{اب - ح^۲} = ۰$$

دو مزدوج قطعات زائد کی مساواتوں اور ان کے متقاربوں کی مساواتوں میں صرف مستقلوں ہی کا فرق ہوتا ہے جو باہدیگر مساوی اور مخالف ہوتے ہیں۔ پس مساوات (۱) والے قطع زائد کے مزدوج کی مساوات

$$ا لا^۲ + ۲ ح لا ما + ب ما^۲ + ۲ گ لا + ۲ ف ما + ج - \frac{۲ \triangle}{اب - ح^۲} = ۰$$ ہے

نتیجۂ صریح۔ خطوطِ مستقیم جن کی تعبیر مساوات $ا لا^۲ + ۲ ح لا ما + ب ما^۲ = ۰$ سے ہوتی ہے تراشِ مخروط کے متقاربوں کے متوازی ہوتے ہیں۔

مثال ۔ تراشِ مخروط $لا^۲ - لا ما - ۲ ما^۲ - ۳ ما - ۲ = ۰$ کے متقارب معلوم کرو۔

ان متقاربوں کی مساوات $لا^۲ - لا ما - ۲ ما^۲ - ۳ ما - ۲ + لہ = ۰$ ہے

جس میں $\text{ل} = -\dfrac{\triangle}{\text{اب} - \text{ح}^{۲}}$

$$\triangle = (۱ \times -۲ \times -۲) + (۲ \times \tfrac{۳}{۲} \times ۰ \times \tfrac{-۱}{۲}) - ۱ \times (\tfrac{۳}{۲})^{۲} - (-۲) \times ۰ - (-۲)(\tfrac{۱}{۲})^{۲}$$

$$= ۴ - \tfrac{۹}{۴} + \tfrac{۱}{۲} = \tfrac{۹}{۲} - \tfrac{۹}{۴} = \tfrac{۹}{۴}$$

$$\text{اب} - \text{ح}^{۲} = (۱ \times -۲) - (\tfrac{۱}{۲})^{۲} = -۲ - \tfrac{۱}{۴} = -\tfrac{۹}{۴}$$

$$\therefore \text{ل} = \frac{-\triangle}{\text{اب} - \text{ح}^{۲}} = \frac{-\frac{۹}{۴}}{-\frac{۹}{۴}} = ۱$$

پس متقاربوں کی مساوات $\text{لا}^{۲} - \text{لاما} - ۲\text{ما}^{۲} + ۳\text{ما} - ۲ + ۱ = ۰$

یعنی $\text{لا}^{۲} - \text{لاما} - ۲\text{ما}^{۲} + ۳\text{ما} - ۱ = ۰$ ہے

طالب علم کو چاہیے کہ محض ضابطہ استعمال نہ کرے بلکہ دی ہوئی مساوات کے ساتھ اس طرح عمل کرے جیسا کہ عام مساوات کے ساتھ کیا گیا ہے - یہ طریقہ زیادہ مفید ثابت ہوگا -

(ح) اگر بجائے $\text{ا لا}^{۲} + ۲\text{ح لاما} + \text{ب ما}^{۲} = ۱$ کے تراشِ مخروط کی مساوات بشکل عام مساوات درجۂ دوم دی جائے تو ذیل کے طریقہ سے اس تراشِ مخروط کے نصف محور دریافت کیے جاسکتے ہیں -

اس لیے کہ تراشِ مخروط کے مرکز کو مبداء ماننے سے عام مساوات درجۂ دوم

$$\text{ا لا}^{۲} + ۲\text{ح لاما} + \text{ب ما}^{۲} + ۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$$

$\text{ا لا}^{۲} + ۲\text{ح لاما} + \text{ب ما}^{۲} + \text{جَ} = ۰$ میں تبدیل ہوجاتی ہے جس میں $\text{جَ} = \dfrac{\triangle}{\text{اب} - \text{ح}^{۲}}$

چونکہ متقاطع ہم مرکز دائرہ کی مساوات $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} - \text{ص}^{۲} = ۰$ ہے

اس لیے مبداء اور دائرہ اور دی ہوئی تراشِ مخروط کے نقاطِ تقاطع میں سے گزرنے والے خطوط کی مساوات

$$\text{ا لا}^{۲} + ۲\text{ح لاما} + \text{ب ما}^{۲} = -\text{ج}\,\frac{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}}{\text{ص}^{۲}}$$ ہے

یعنی لا۲ (ا + جَ/ص۲) + ۲ ح لا ما + ما۲ (ب + جَ/ص۲) = ۰

یہ خطوط باہمدیگر منطبق ہونگے اگر (ا + جَ/ص۲) (ب + جَ/ص۲) - ح۲ = ۰

∴ اب + اجَ/ص۲ + بجَ/ص۲ + جَ۲/ص۴ - ح۲ = ۰

یعنی اب ص۴ + جَ ص۲ (ا + ب) + جَ۲ - ص۴ ح۲ = ۰

∴ ص۴ (اب - ح۲) + (ا + ب) جَ ص۲ + جَ۲ = ۰

پس ص۴ (اب - ح۲) + ص۲ △(ا + ب)/(اب - ح۲) + △۲/(اب - ح۲)۲ = ۰

∴ ص۴ (اب - ح۲)۳ + (ا + ب) △ (اب - ح۲) ص۲ + △۲ = ۰

مثال - تراشِ مخروط ۵ لا۲ - ۲۶ لا ما + ۵ ما۲ + ۱۰ لا - ۲۶ ما + ۷۱ = ۰ کے نصف محوروں کی تعیین -

اب - ح۲ = ۲۵ - (۱۳)۲ = - ۱۴۴

△ = اب ج + ۲ ف گ ح - ا ف۲ - ب گ۲ - ج ح۲ = ۱۷۷۵ + ۱۶۹۰ - ۸۴۵ - ۱۲۵ - ۱۱۹۹۹

= - ۹۵۰۴

∴ - (۱۴۴)۳ ص۴ + (۹۵۰۴) × ۱۴۴۰ ص۲ + (۹۵۰۴)۲ = ۰

یعنی ۱۲ ص۴ - ۵۵ ص۲ - ۳۶۳ = ۰

∴ ص۲ = ۳۳/۴ یا - ۱۱/۳ پس منحنی قطع زائد ہے۔

بجائے ضابطہ استعمال کرنے کے پہلے مرکز کے محدد دریافت کر کے تفصیل وار عمل کرنا بہتر ہوگا - اِس طرح عمل کرنے سے طالب علم کو معلوم ہوگا کہ مرکز کے محدد لا = - ۱ اور ما = ۰ ہیں -

بارھویں باب کی مثالیں

۱- مندرجۂ ذیل مخروطی تراشوں کی نوعیت اور ان کی وضعیں دریافت کرو:-

(ا) لا^2 - ۶لاما + ۹ما^2 - ۲۸۰ لا - ۲۰ = ۰

(ب) ۴لاما + ۲لا - ۸ما + ۱ = ۰

(ج) ۱۴لا^2 - ۲۴لاما + ۳۴ما^2 - ۱۸۸لا + ۱۶ما + ۱۹۶ = ۰

(د) ۶لا^2 - ۵لاما - ۶ما^2 - ۴۶لا - ۹ما + ۶۰ = ۰

۲- ثابت کرو کہ اگر کسی تراش مخروط کے دو وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تو ان کے تقاطع کا نقطہ منحنی کا مرکز ہونا چاہیے۔

۳- لہ کی کیا قیمت ہونی چاہیے تاکہ مساوات

۲لا^2 + لہ لاما - ما^2 - ۳لا + ۶ما - ۹ = ۰

خطوطِ مستقیم کے ایک جوڑ کو تعبیر کرے۔

۴- قطع زائد ۲لا^2 - ۷لاما - ۳ما^2 - ۲لا - ۸ما - ۶ = ۰

کے متقارب دریافت کرو۔

اس قطع زائد کے مزدوج کی مساوات بھی لکھو۔

۵- ثابت کرو کہ اگر ا$_1$لا^2 + ۲ح$_1$ لاما + ب$_1$ ما^2 = ۱ اور

ا$_2$لا^2 + ۲ح$_2$ لاما + ب$_2$ ما^2 = ۱

ایک ہی تراشِ مخروط کو تعبیر کرتے ہیں اور محدّدوں کے محور علی القوائم ہیں تو

$$(ا_1 - ب_1)^2 + ۴ح_1^2 = (ا_2 - ب_2)^2 + ۴ح_2^2$$

۶- ثابت کرو کہ درجۂ دوم کی عام مساوات جس تراشِ مخروط کو تعبیر کرتی ہے وہ قائم قطع زائد ہے اگر ا + ب = ۰

۷- ثابت کرو کہ لاما + ۶لا + ب ما + ج = ۰ ایک قطع زائد کی عام مساوات ہے جبکہ محدّدوں کے محور متقاربوں کے متوازی ہوتے ہیں۔

تیرہواں باب

کعبی اور عددی سروں کی مساواتوں کا عملی حل

۶۶ - (ا) اکثر مساواتیں جن کی طبیعیات یا انجینیری میں ضرورت ہوتی ہے تقریبی طریقہ پر حل کی جا سکتی ہیں - یہ مساواتیں عموماً دو قسم کی ہوتی ہیں :-

(۱) جبری مساواتیں از قسم لا^{م} + ا لا + ب = ۰ جس میں م > ۲

(۲) ماورائی مساواتیں ـ مثلاً لا^{ا} + ا لوک لا = ب، و^{لا} + ا لا = ج،

لا + ا جب لا + ب لوک لا = ج وغیرہ

قسم اول کی مساواتیں جبری طریقہ پر حل ہو سکتی ہیں بشرطیکہ م = ۳ یا م = ۴ لیکن یہ جبری طریقے اکثر طویل اور دقت طلب ہوتے ہیں - ترسیمی طریقہ زیادہ آسان اور زود عمل ثابت ہوتا ہے - اگر جبری مساوات میں م کی قیمت ۴ سے زائد ہو تو اس کے جبری حل کا کوئی طریقہ نہیں دریافت ہوا ہے اور نہ ماورائی مساواتوں کا کوئی جبری طریقہ موجود ہے -

ترسیمی طریقہ میں یا تو واحد طریق مرتسم کیا جاتا ہے یا ایک ہی کاغذ پر دو طریق مرتسم کر کے ان کے تقاطع کے نقطے دریافت کیے جاتے ہیں - واضح ہے کہ ان طریقوں سے مساواتوں کی صرف حقیقی اصلیں معلوم ہو سکینگی اور وہ بھی تقریبی طور پر - اس کے بعد تحلیلی ذرائع سے مدد لے کر ان اصلوں کی قیمت مطلوبہ درجۂ صحت تک دریافت کی جا سکتی ہے -

(ب) ہورنر (Horner) کا تقریبی طریقہ —

فرض کرو مساوات کثیر رقمی ہے اور بشکل ف (لا) = ۰ لکھی جا سکتی ہے۔

(۱) آزمائش سے دو متصل صحیح اعداد ھ، ھ + ۱ دریافت کیے جائیں جن کے مابین مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل عہ واقع ہوتی ہے۔
(سردست یہ فرض کیا جائے کہ ان دو متصل صحیح عددوں کے مابین کوئی دوسری اصل موجود نہیں ہے)۔

(۲) مساوات ف۱ (ما) = ۰ تیار کرو جس کی اصلیں مصرحۂ بالا اصلوں سے بقدر ھ کم ہوں۔ واضح ہے کہ اس نئی مساوات ف۱ (ما) = ۰ کی وہ اصل جو عہ کے متناظر ہے ف (ما) = ۰ کی صرف ایک ہی ایسی اصل ہے جو صفر اور ۱ کے مابین واقع ہے۔ اس لیے کہ نئی مساوات کی اصل سابقہ مساوات کی اصل سے بقدر ھ کمتر ہے۔

(۳) حسابی عمل کی دقتوں سے بچنے کے لیے جو صفر اور ۱ کے مابین کسری اصل واقع ہونے سے پیدا ہوتی ہیں ایک مساوات ف۱ (لا) = ۰ تیار کی جائے جس کی اصلیں (ہر ایک) ف۱ (ما) = ۰ کی اصلوں کی دہ چند ہوں۔
واضح ہے کہ ف۱ (لا) = ۰ کی ایک اصل بوجہ عمل (۱) صفر اور ۱۰ کے درمیان واقع ہے۔

(۴) آزمائش سے دو متصل صحیح اعداد ھ۱ اور ھ۱ + ۱ دریافت کرو جن کے مابین ف۱ (لا) = ۰ کی مطلوبہ اصل واقع ہے۔
پس مساوات ف (لا) = ۰ کی اصل عہ بموجب طریقۂ کتابت کے اعشاریہ ھ، ھ۱ اور (ھ۱ + ۱)، ھ کے درمیان واقع ہوگی۔

(۵) اسی طرح عمل کرتے ہوئے مساوات ف۲ (ما) = ۰ دریافت کرو جس کی اصلیں (ہر ایک) مساوات ف۱ (لا) = ۰ کی اصلوں سے بقدر ھ۱ کمتر ہوں اور اس کے بعد مساوات ف۲ (لا) = ۰ معلوم کرو جس کی اصلیں (ہر ایک) مساوات ف۲ (ما) = ۰ کی اصلوں کی دہ چند ہوں۔
پس ظاہر ہے کہ اعشاریہ کے جس مقام تک صحت کے ساتھ اصل کی قیمت

دریافت کرنا مقصود ہو دریافت کی جا سکتی ہے۔

مثال۔ مساوات ف (لا) ≡ ۲ لا^{3} − ۷ لا^{2} + لا + ۴ = ۰
کی ایک اصل ع ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے۔ اعشاریہ کے دو مقاموں تک صحت کے ساتھ اس کی قیمت دریافت کرو۔

(۱) چونکہ ف (۳) = −۲ اور ف (۴) = ۴۴ مساوات کی ایک اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے۔

(۲) ف (لا) = ۰ کی اصلوں سے بقدر ۳ کمتر اصلوں کی مساوات تیار کرنے کے لیے ما = لا − ۳ یعنے لا = ما + ۳ لکھو۔ پس

۲ (ما + ۳)^{3} − ۷ (ما + ۳)^{2} + (ما + ۳) + ۴ = ۰

∴ ف$_{1}$ (ما) ≡ ۲ ما^{3} + ۱۱ ما^{2} + ۱۳ ما − ۲ = ۰

(۳) ف$_{1}$ (ما) = ۰ کی اصلوں کے ۱۰ چند اصلوں کی مساوات بنانے کے لیے لا = ۱۰ ما لکھو
یعنے ما = لا/۱۰ ۔ تب

ف$_{2}$ (لا) ≡ لا^{3} + ۵۵ لا^{2} + ۶۵۰ لا − ۱۰۰۰ = ۰

(۴) آزمائش سے دریافت ہوتا ہے کہ ف$_{2}$ (لا) = ۰ کی مطلوبہ اصل جو صفر اور ۱۰ کے درمیان واقع ہے فی الحقیقت ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔

(۱') پس ع کی قیمت ۳٫۱ اور ۳٫۲ کے مابین ہے۔

(۲') ف$_{2}$ (لا) = ۰ کی اصلوں سے بقدر ۱ کمتر اصلوں والی مساوات تیار کرنے کے لیے

ما = لا − ۱ یعنے لا = ما + ۱ لکھو۔ تب

(ما + ۱)^{3} + ۵۵ (ما + ۱)^{2} + ۶۵۰ (ما + ۱) − ۱۰۰۰ = ۰

یعنے ف$_{3}$ (ما) ≡ ما^{3} + ۵۸ ما^{2} + ۷۶۳ ما − ۲۹۴ = ۰

(۳') ف$_{3}$ (ما) = ۰ کی اصلوں کی ۱۰ چند اصلوں والی مساوات تیار کرنے کے لیے

لا = ۱۰ ما یعنے ما = لا/۱۰ لکھو۔ تب

ف$_2$ (لا) ≡ لا^3 + ۵۸۰ لا^2 + ۷۶۳۰۰ لا − ۲۹۴۰۰۰ = ۰

(ہ) آزمائش سے ف$_2$ (لا) = ۰ کی مطلوبہ اصل جو صفر اور ۱۰ کے مابین واقع ہے فی الحقیقت ۳ اور ۴ کے درمیان ہے۔

پس عہ کی قیمت ۳۱۳ء۳ اور ۳۱۴ء۳ کے درمیان ہے۔

اسی طریقۂ عمل سے اگر ہم چاہیں تو اعشاریہ کے مزید مقاموں تک صحت کے ساتھ عہ کی قیمت دریافت کر سکتے ہیں۔

(ب) مصرحۂ بالا طریقہ اگر براہِ راست استعمال کیا جائے تو بہت ہی طویل اور تکلیف رساں پایا جاتا ہے۔ اس لیے ذیل میں ایسے طریقے درج کیے جاتے ہیں جن سے (۱) کثیر رقمی جملوں کی اختصاری تقسیم اور (۲) ایسی مساوات کی تعیین جس کی اصلیں کسی دی ہوئی مساوات کی اصلوں سے بقدر ایک معینہ حقیقی عدد کے کمتر ہوں، بآسانی عمل میں آ سکے۔

(۱) کثیر رقمی جملہ ا$_0$ لا^ن + ا$_1$ لا$^{ن-1}$ + ا$_2$ لا$^{ن-2}$ + ... + ا$_ن$ کی تقسیم (لا − ح) سے بذریعۂ طریقۂ اختصار۔

فرض کرو کہ ا$_0$ لا^ن + ا$_1$ لا$^{ن-1}$ + ا$_2$ لا$^{ن-2}$ + ... + ا$_ن$ ≡

(لا − ح) (ب$_0$ لا$^{ن-1}$ + ب$_1$ لا$^{ن-2}$ + ... + ب$_{ن-1}$) + س (جس میں س = باقی)

مساوات کے ہر دو ارکان کے لا کی مختلف قوتوں کے سروں کو متعادل لکھنے سے

ا$_0$ = ب$_0$ ∴ ب$_0$ = ا$_0$

ا$_1$ = ب$_1$ − ب$_0$ ح ب$_1$ = ا$_1$ + ب$_0$ ح

ا$_2$ = ب$_2$ − ب$_1$ ح ب$_2$ = ا$_2$ + ب$_1$ ح

ا$_3$ = ب$_3$ − ب$_2$ ح ب$_3$ = ا$_3$ + ب$_2$ ح

. . . .

ا$_ن$ = س − ب$_{ن-1}$ ح س = ا$_ن$ + ب$_{ن-1}$ ح

پس دیے ہوئے کثیر رقمی جملہ کے سروں کو ایک قطار میں لکھ ڈالو۔ اس قطار کے نیچے ایک اور قطار کی جگہ چھوڑ کر ایک خط کھینچو۔ خط کے نیچے اور ا$_0$ کے

عین نیچے ب. لکھو پھر ب. کو ح سے ضرب دے کر خط کے اوپر ا$_{۱}$ کے عین نیچے لکھو - اور ان کے حاصل جمع ب$_{۱}$ کو ان کے اور خط کے نیچے لکھو اور اس طرح خط کے اوپر اور نیچے کی دونوں قطاروں کو مکمل کرو - جیسا کہ ذیل میں مندرج ہے :-

ا.	ا$_{۱}$	ا$_{۲}$	ا$_{۳}$	....	ا$_{ن-۱}$	ا$_{ن}$
	ب.ح	ب$_{۱}$ح	ب$_{۲}$ح	....	ب$_{ن-۲}$ح	ب$_{ن-۱}$ح
ب.	ب$_{۱}$	ب$_{۲}$	ب$_{۳}$	....	ب$_{ن-۱}$	بن

مثال - جملہ ۲ لا^{۵} + ۷ لا^{۴} - ۳ لا^{۳} - ۵ لا - ۹ کو (لا + ۴) پر تقسیم کرو :-

لا + ۴ = لا - (۴) لہذا

۲	۷	۳-	۰	۵-	۹-
	۸-	۴	۴-	۱۶	۴۴-
۲	۱-	۱	۴-	۱۱	۵۳-

پس خارج قسمت = ۲ لا^{۴} - لا^{۳} + لا^{۲} - ۴ لا + ۱۱ اور باقی = - ۵۳

(۲) ایسی مساوات کی تعیین جس کی اصلیں بالترتیب مساوات

ا. لا^{ن} + ا$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ا$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ان کی

اصلوں سے بقدر ح کمتر ہوں -

فرض کرو ما = لا - ح پس لا = ما + ح

اب فرض کرو ا. (ما + ح)^{ن} + ا$_{۱}$ (ما + ح)$^{ن-۱}$ + ا$_{۲}$ (ما + ح)$^{ن-۲}$ + ... + ان

≡ آ. ما^{ن} + آ$_{۱}$ ما$^{ن-۱}$ + آ$_{۲}$ ما$^{ن-۲}$ + ... + آن

پس ا. لا^{ن} + ا$_{۱}$ لا$^{ن-۱}$ + ا$_{۲}$ لا$^{ن-۲}$ + ... + ان ...... (۱)

$$= ا_۰ (لا-ح)^{ن} + ا_۱ (لا-ح)^{ن-۱} + ا_۲ (لا-ح)^{ن-۲} + \cdots + ا_{ن-۱} (لا-ح) + ا_ن$$

$$= (لا-ح) \left\{ ا_۰ (لا-ح)^{ن-۱} + ا_۱ (لا-ح)^{ن-۲} + \cdots + ا_{ن-۱} \right\} + ا_ن$$

جس سے واضح ہے کہ $ل_۰ لا^{ن} + ل_۱ لا^{ن-۱} + ل_۲ لا^{ن-۲} + \cdots + ل_ن$ کو $(لا-ح)$ پر تقسیم کرنے سے $ا_ن$ باقی رہتا ہے۔

اگر $ل_۰ لا^{ن} + ل_۱ لا^{ن-۱} + \cdots + ل_ن$ کو $(لا-ح)$ پر تقسیم کرنے سے خارج قسمت $ب_۰ لا^{ن-۱} + ب_۱ لا^{ن-۲} + ب_۲ لا^{ن-۳} + \cdots + ب_{ن-۱}$ دستیاب ہوتا ہے تو $(لا-ح)(ب_۰ لا^{ن-۱} + ب_۱ لا^{ن-۲} + \cdots + ب_{ن-۱}) + ا_ن$

$$= ل_۰ لا^{ن} + ل_۱ لا^{ن-۱} + \cdots + ل_ن \quad \ldots (۲)$$

پس (۱) اور (۲) مساواتوں سے

$$(لا-ح)(ب_۰ لا^{ن-۱} + ب_۱ لا^{ن-۲} + \cdots + ب_{ن-۱}) + ا_ن$$

$$= ا_۰ (لا-ح)^{ن} + ا_۱ (لا-ح)^{ن-۱} + \cdots + ا_{ن-۱} (لا-ح) + ا_ن$$

مساوات کے دونوں ارکان سے $ا_ن$ کو قلمزد کر کے باقی ماندہ جملوں کو $(لا-ح)$ پر تقسیم کرنے سے

$$ب_۰ لا^{ن-۱} + ب_۱ لا^{ن-۲} + \cdots + ب_{ن-۱}$$

$$= ا_۰ (لا-ح)^{ن-۱} + ا_۱ (لا-ح)^{ن-۲} + \cdots + ا_{ن-۱}$$

پس واضح ہے کہ جملہ $ب_۰ لا^{ن-۱} + ب_۱ لا^{ن-۲} + \cdots + ب_{ن-۱}$ کو $(لا-ح)$ پر تقسیم کرنے کے بعد جو باقی رہتا ہے وہ $ا_{ن-۱}$ ہے۔

اسی طرح تقسیم کا عمل جاری رکھ کر مطلوبہ مساوات کے تمام سروں کو دریافت کرسکتے ہیں۔

مثال - ایک ایسی مساوات کی تعیین جس کی ہر ایک اصل مساوات ۳ لا^{۳} - ۷ لا^{۲} + ۲ لا - ۴ = ۰ کی ہر حقیقی اصل سے بقدر ۵ کمتر ہے -

مصرحۂ بالا طریقہ کے بموجب

۴-	۲	۷-	۳	(ع)
۲۱۰	۴۰	۱۵		
ا$_{۳}$ ≡ ۲۰۶	۴۲	۸	۳	
	۱۱۵	۱۵		
	ا$_{۲}$ ≡ ۱۵۷	۲۳	۳	(ب)
		۱۵		
		ا$_{۱}$ ≡ ۳۸	۳	(ج)

ا$_{۰}$ ≡ ۳

پس مطلوبہ مساوات ۳ لا^{۳} + ۳۸ لا^{۲} + ۱۵۷ لا + ۲۰۶ = ۰ ہے

مثال کے طور پر مساوات لا^{۴} - ۵ لا^{۳} + ۷ لا^{۲} - ۱۷ لا + ۱۱ = ۰ کی ایک حقیقی اصل مندرجۂ بالا طریقوں سے اعشاریہ کے چوتھے مقام تک محسوب کی جاتی ہے :-

آزمائش سے (یا ترسیمی طریقے سے) پتہ چلتا ہے کہ مساوات کی ایک اصل ۴ اور ۵ کے مابین واقع ہے لہذا دی ہوئی مساوات کی اصلوں سے بقدر ۴ کمتر اصلوں والی مساوات حاصل کی جاتی ہے اور جملہ عمل ایک جدول کی شکل میں ترتیب دیا جاتا ہے -

ف(لا) ≡	۱	۵ ۴	۷ ۴-	۱۷- ۱۲	۱۱ ۲۰-	اصلوں میں کمی بقدر
	۱	۱- ۴	۳ ۱۲	۵- ۶۰	۹	
	۱	۳ ۴	۱۵ ۲۸	۵۵		۴
	۱	۷ ۴	۴۳			
ف۱(ما)	۱	۱۱				
ف۱(لا) ≡	۱	۱۱۰ ۱	۴۳۰۰ ۱۱۱	۵۵۰۰۰ ۴۴۱۱	۹۰۰۰۰- ۵۹۴۱۱	
	۱	۱۱۱ ۱	۴۴۱۱ ۱۱۲	۵۹۴۱۱ ۴۵۲۳	۳۰۵۸۹-	۱
	۱	۱۱۲ ۱	۴۵۲۳ ۱۱۳	۶۳۹۳۴		
		۱۱۳ ۱	۴۶۳۶			
ف۲(ما)	۱	۱۱۴				
ف۲(لا) ≡	۱	۱۱۴۰ ۴	۴۶۳۶۰۰ ۴۵۷۶	۶۳۹۳۴۰۰۰ ۱۸۷۲۷۰۴	۳۰۵۸۹۰۰۰۰- ۲۶۳۲۲۶۸۱۶	
	۱	۱۱۴۴ ۴	۴۶۸۱۷۶ ۴۵۹۲	۶۵۸۰۶۷۰۴ ۱۸۹۱۰۷۲	۴۲۶۶۳۱۸۴-	۴
	۱	۱۱۴۸ ۴	۴۷۲۷۶۸ ۴۶۰۸	۶۷۶۹۷۷۷۶		
	۱	۱۱۵۲ ۴	۴۷۷۳۷۶			
ف۳(ما)	۱	۱۱۵۶				
ف۳(لا) ≡	۱	۱۱۵۶۰ ۶	۴۷۷۳۷۶۰۰ ۶۹۳۹۶	۶۷۶۹۷۷۷۶۰۰۰ ۲۸۶۸۴۱۹۷۶	۴۲۶۶۳۱۸۴۰۰۰۰- ۴۰۷۹۰۷۷۰۷۸۵۶	
	۱	۱۱۵۶۶ ۶	۴۷۸۰۶۹۹۶ ۶۹۴۳۲	۶۷۹۸۴۶۱۷۹۷۶ ۲۸۷۲۵۸۵۶۸	۱۸۷۲۴۱۳۲۱۴۴-	
	۱	۱۱۵۷۲ ۶	۴۷۸۷۶۴۲۸ ۶۹۴۶۸	۶۸۲۷۱۸۷۶۵۴۴		۶
	۱	۱۱۵۷۸ ۶	۴۷۹۴۵۸۹۶			
ف۴(ما)	۱	۱۱۵۸۴				
ف۴(لا) ≡	۱	۱۱۵۸۴۰	۴۷۹۴۵۸۹۶۰۰	۶۸۲۷۱۸۷۶۵۴۴۰۰۰	۱۸۷۲۴۱۳۲۱۴۴۰۰۰۰-	۳

پہلے سیاہ و بیز خط کے نیچے کی مساوات ف (لا) = ۰ کی اصلیں مساوات فہ (ما) = ۰ کی اصلوں کے بالترتیب دہ چند ہیں۔

اس کے بعد آزما کر دیکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات ف (لا) = ۰ کی ایک اصل ۱ اور ۲ کے مابین واقع ہے۔ اس لیے ف (لا) = ۰ کی اصلوں کو بقدر ا گھٹا کر نئی مساوات فہ (ما) = ۰ تیار کی جاتی ہے۔ اس طرح عمل کے بقیہ مراتب انجام پاتے ہیں اور دی ہوئی مساوات کی اصل ......۲۶۲‏۱۴،۴ برآمد ہوتی ہے۔

نوٹ :۔ پہلے دو تین استحالے تکمیل پانے کے بعد بائیں جانب کے سب سے آخری باقی سے عین پہلے کے باقی پر آخری باقی کو تقسیم کر کے اصل کا اعشاریہ کے بعد کا دوسرا ہندسہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً ....۳۰۵۸۹ کو ....۶۳۹۳۴ پر تقسیم کرنے سے ہندسہ ۴ حاصل آتا ہے۔

معہذا جب یہ مقسوم علیہ دریافت طلب ہندسوں کی تعداد سے دو زائد ہندسوں پر مشتمل ہوتا ہے تو حسابی عمل میں حسبِ ذیل اختصار عائد کیا جا سکتا ہے :۔

صفروں کے بڑھانے کے عوض آخری سر سے عین پہلے کے سر کا آخری ہندسہ قلمزد کر دیا جائے اور اس سے عین پہلے کے سر کے آخری دو ہندسے قلمزد کیے جائیں وغیرہ وغیرہ۔ پس دوسرے و بیز خط کے نیچے کا حسابی عمل اختصار کے ساتھ یوں لکھا جا سکتا ہے :۔

۴،۱۴۶۳) ۳۰۵۸۹ - ۶۳۹۳۴ ۲۶۴۴ ۸۴ ۴۲ ۱

۲۶۳۰۸ ۱۸۴

۴۲۸۱ - ۶۵۷۷

۴۰۵۶ ۱۸۴

۲۲۵ - ۶۷۶۱

۲۰۱

۲۴ -

پہلی مرتبہ جب ہندسوں کو قلمزد کرتے ہیں تو پہلے اور دوسرے سر ساقط ہو جاتے ہیں۔ جب دوسری مرتبہ ہندسے قلمزد کیے جاتے ہیں تو تمام سر اِلّا آخری دو کے ساقط ہو جاتے ہیں۔ اور اس کے بعد کا عمل معمولی اختصاری تقسیم کے ذریعہ اختتام کو پہنچتا ہے۔

۷۴۔ کعبی مساواتوں کے حل سے پہلے مناسب معلوم ہوتا ہے کہ معادلات سے متعلق چند مفید کلیات و واقعات کا محض ذکر کر دیا جائے ۔ ان کا ثبوت نصاب سے باہر ہونے کی وجہ سے غیر ضروری ہے ۔ البتہ شوقین طالب علم مستند کتابوں میں ان کا مطالعہ کر سکتا ہے ۔

(۱) ہر ایسی مساوات کی جو بشکل ف (لا) = ۰ لکھی جاتی ہے ایک اصل ضرور ہوتی ہے خواہ وہ حقیقی ہو یا خیالی ۔

(۲) ن ۔ ویں درجہ کی ہر مساوات کی ن ہی اصلیں ہوتی ہیں ۔ ن سے زیادہ نہیں ۔

(۳) اگر مساوات $\text{ا}_{0}\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_{1}\text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_{2}\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots\dots + \text{ا}_{\text{ن}-1}\text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}} = 0$

ہو تو وہ بشکل $\text{لا}^{\text{ن}} + \frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_0}\text{لا}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_0}\text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots\dots + \frac{\text{ا}_{\text{ن}-1}}{\text{ا}_0}\text{لا} + \frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_0} = 0$

لکھی جا سکتی ہے اور اگر عہ، بہ، جہ، ... کہ، اس کی اصلیں ہوں تو مساوات متماثلاً

$(\text{لا} - \text{عہ})(\text{لا} - \text{بہ})(\text{لا} - \text{جہ}) \dots\dots (\text{لا} - \text{کہ}) = 0$ کے مساوی ہے۔

$$\text{پس}\quad \Sigma\, \text{عہ} = -\frac{\text{ا}_1}{\text{ا}_0}،\quad \Sigma\, \text{عہ بہ} = \frac{\text{ا}_2}{\text{ا}_0}،\quad \Sigma\, \text{عہ بہ جہ} = \frac{\text{ا}_3}{\text{ا}_0} \dots\dots$$

$$\text{اور}\quad \text{عہ بہ جہ} \dots\dots \text{کہ} = (-1)^{\text{ن}} \frac{\text{ا}_{\text{ن}}}{\text{ا}_0}$$

طالب علم کو شاید یہ خیال ہوگا کہ چونکہ مندرجۂ بالا روابط کی تعداد مساوات کی اصلوں کی تعداد کے برابر ہے اس لیے ہر ایک مساوات حل کی جا سکتی ہے ۔ لیکن حقیقتِ حال اس سے بہت مختلف ہے ۔ اس لیے کہ اگر ن اصلوں میں سے ن ۔ ۱ کو ساقط کر کے باقی ماندہ یعنے ن ۔ ویں اصل کی تعیین کے لیے مساوات تیار کی جائے تو چونکہ یہ مقادیر ہر ایک مساوات میں تشاکلاً شامل ہیں لہذا ہمیشہ ایسی ہی مساوات حاصل ہوگی جس کے سر ابتدائی مساوات کے سر ہیں ۔

(۴) حقیقی سروں کی مساوات میں خیالی اصلوں کے زوج ہوتے ہیں ۔

(۵) منطق سروں کی مساوات میں اصم اصلوں کے زوج ہوتے ہیں۔

(۶) مساوات ف (لا) = ۰ کی مثبت اصلوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ اتنی ہی ہوسکتی ہیں جتنی کہ جملہ ف (لا) میں علامات کی تبدیلیاں ہیں اور اس کی منفی اصلوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ اتنی ہوسکتی ہے جتنی کہ جملہ ف (-لا) میں علامات کی تبدیلیاں ہیں - یہ کلیہ ڈیکارٹس (Descartes) کا علامتوں کا قانون یا قاعدہ کہلاتا ہے۔

(۷) طاق درجہ کی ہر مساوات کی کم از کم ایک حقیقی اصل ہوتی ہے جس کی علامت مساوات کی آخری رقم کی علامت کے برعکس ہوتی ہے۔

(۸) اگر کسی مساوات کا درجہ جفت اور اس کی آخری رقم منفی ہو تو اس کی کم از کم دو اصلیں حقیقی ہونگی جن میں سے ایک مثبت ہوگی اور دوسری منفی۔

۶۸- کعبی مساواتیں - کارڈان (Cardan) کا حل۔

فرض کرو کہ کعبی مساوات ا. لا^{3} + ۳ ا$_{1}$ لا^{2} + ۳ ا$_{2}$ لا + ا$_{3}$ = ۰ ...... (۱) ہے

جس میں ا.، ا$_{1}$، ا$_{2}$ اور ا$_{3}$ عام طور پر ملتف (Complex) اعداد ہیں۔

اب بجائے لا کے ما + ج لکھو .... (۲)

تب ا. (ما + ج)^{3} + ۳ ا$_{1}$ (ما + ج)^{2} + ۳ ا$_{2}$ (ما + ج) + ا$_{3}$ = ۰

یعنی ا. ما^{3} + ۳ (ا. ج + ا$_{1}$) ما^{2} + ۳ (ا. ج^{2} + ۲ ا$_{1}$ ج + ا$_{2}$) ما

+ (ا. ج^{3} + ۳ ا$_{1}$ ج^{2} + ۳ ا$_{2}$ ج + ا$_{3}$) = ۰ ..... (۳)

مقصد یہ ہے کہ جملہ سے رقم جس میں ما^{2} شریک ہے معدوم ہوجائے۔ پس ج کی قیمت ایسی ہونی چاہیے کہ

ا. ج + ا$_{1}$ = ۰ یعنی ج = − ا$_{1}$ / ا.

مساوات (۳) کو ا. پر تقسیم کرنے سے

مساوات $\text{ما}^{3} + 3\,\text{پ}\,\text{ما} + \text{ق} = 0$ ..... (۴) حاصل ہوتی ہے۔
اور یہ کعبی مساوات کی معیاری شکل ہے۔
اس کے حل کے لیے فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{ع} + \text{و}$

$\therefore\ \text{ع}^{3} + \text{و}^{3} + 3(\text{ع}+\text{و})(\text{ع}\text{و}+\text{پ}) + \text{ق} = 0$ .... (۵)

چونکہ ہمیں دو غیر معلوم مقادیر سے سابقہ پڑا ہے اس لیے ہم ان کا اس طرح انتخاب کر سکتے ہیں کہ وہ رابطہ (۵) کی تطبیق کرے اور نیز رابطہ

$\text{ع}\text{و} + \text{پ} = 0$ .... (۶) کی

(۵) اور (۶) سے $\text{ع}^{3} + \text{و}^{3} + \text{ق} = 0$ ...... (۷)

مساوات (۷) میں و کی قیمت $-\frac{\text{پ}}{\text{ع}}$ درج کرنے سے $\text{ع}^{3} - \frac{\text{پ}^{3}}{\text{ع}^{3}} + \text{ق} = 0$

یعنی $\text{ع}^{6} + \text{ق}\,\text{ع}^{3} - \text{پ}^{3} = 0$

$$\therefore\ \text{ع}^{3} = \frac{-\text{ق} \pm \sqrt{\text{ق}^{2} - 4\,\text{پ}^{3}}}{2}$$

ع^{3} کی ان دو قیمتوں میں سے مثبت علامت کی ایک قیمت لو

یعنی $\text{ع}^{3} = \frac{-\text{ق} + \sqrt{\text{ق}^{2} + 4\,\text{پ}^{3}}}{2}$ لکھو۔

$$\therefore\ \text{ع} = \left(\frac{-\text{ق} - \sqrt{\text{ق}^{2} + 4\,\text{پ}^{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ جبکہ } \text{و} = \left(\frac{-\text{ق} - \sqrt{\text{ق}^{2} + 4\,\text{پ}^{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ازروئے رابطہ (۶)

$$\text{معہذا } \text{ع} = \text{سہ}\left(\frac{-\text{ق} + \sqrt{\text{ق}^{2} + 4\,\text{پ}^{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ جبکہ } \text{و} = \text{سہ}^{2}\left(\frac{-\text{ق} - \sqrt{\text{ق}^{2} + 4\,\text{پ}^{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{اور } \text{ع} = \text{سہ}^{2}\left(\frac{-\text{ق} + \sqrt{\text{ق}^{2} + 4\,\text{پ}^{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ جبکہ } \text{و} = \text{سہ}\left(\frac{-\text{ق} - \sqrt{\text{ق}^{2} + 4\,\text{پ}^{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore\ \text{ما} = (\text{ع}+\text{و}) = \left(\frac{-\text{ق} + \sqrt{\text{ق}^{2} + 4\,\text{پ}^{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-\text{ق} - \sqrt{\text{ق}^{2} + 4\,\text{پ}^{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{یا سہ}\left(\frac{-\text{ق}+\sqrt{\text{ق}^{2}+4\text{پ}^{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\text{سہ}^{2}\left(\frac{-\text{ق}-\sqrt{\text{ق}^{2}+4\text{پ}^{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{یا سہ}^{2}\left(\frac{-\text{ق}+\sqrt{\text{ق}^{2}+4\text{پ}^{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\text{سہ}\left(\frac{-\text{ق}-\sqrt{\text{ق}^{2}+4\text{پ}^{3}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

جن میں سہ اور سہ^{2} اکائی کے خیالی جذر الکعب ہیں۔

(۱) اگر $\text{ق}^{2}+4\text{پ}^{3}$ مثبت ہے تو ع^{3} اور و^{3} دونوں حقیقی ہیں۔ فرض کرو کہ ع اور و بالترتیب ع^{3} اور و^{3} کے حسابی جذر الکعب ہیں۔ تب کعبی مساوات کی اصلیں

ع + و، سہ ع + سہ^{2} و اور سہ^{2} ع + سہ و ہیں۔

ان میں کی پہلی اصل (ع + و) حقیقی ہے اور سہ اور سہ^{2} کی قیمتیں درج کرنے سے باقی ماندہ دو اصلیں

$$-\frac{\text{ع}+\text{و}}{2}+\frac{\text{ع}-\text{و}}{2}\sqrt{-3}\quad\text{اور}\quad-\frac{\text{ع}+\text{و}}{2}-\frac{\text{ع}-\text{و}}{2}\sqrt{-3}$$

ہو جاتی ہیں۔

(۲) اگر $\text{ق}^{2}+4\text{پ}^{3}$ صفر ہے تو $\text{ع}^{3}=\text{و}^{3}$ اور ع = و اور اصلیں ۲ع، ع(سہ + سہ^{2})، ع(سہ^{2} + سہ) یعنی ۲ع، -ع اور -ع ہو جاتی ہیں۔

(۳) اگر $\text{ق}^{2}+4\text{پ}^{3}$ منفی ہے تو ع^{3} اور و^{3} خیالی جملے ہو جاتے ہیں اور عہ + خ بہ اور عہ - خ بہ کی صورت اختیار کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ ان مقادیر کے جذر الکعب م + خ ن اور م - خ ن ہیں۔ تب کعبی مساوات کی اصلیں

م + خ ن + م - خ ن یعنی ۲م،

سہ (م + خ ن) + سہ^{2} (م - خ ن) یعنی $-\text{م}-\text{ن}\sqrt{3}$،

سہ^{2} (م + خ ن) + سہ (م - خ ن) یعنی $-\text{م}+\text{ن}\sqrt{3}$ ہو جاتی ہیں۔

جو سب کے سب حقیقی مقادیر ہیں لیکن چونکہ خیالی مقادیر کے جذر الکعب کی ٹھیک قیمت دریافت کرنے کا کوئی عام حسابی یا جبری طریقہ موجود نہیں ہے اس لیے کارڈان کے طریقہ کا حل عملی نقطۂ نظر سے کچھ سود مند نہیں ہوتا ہے جبکہ کبھی مساوات کی تینوں اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوتی ہیں - پس اس صورت کو کارڈان کے حل کی ناقابلِ تحویل صورت کہتے ہیں -

واضح ہو کہ ہر حالت میں کبھی مساوات کی حقیقی اصلیں کارڈان کے حل کی بہ نسبت ھورنر کے تقریبی طریقہ سے زیادہ آسانی کے ساتھ دریافت کی جاسکتی ہیں -

مثال - مساوات $لا^۳ - ۶لا - ۹ = ۰$ کو حل کرو ...... (۱)

چونکہ مساوات معیاری شکل کی ہے (یعنی $لا^۲$ کی رقم معدوم ہے)

لہٰذا فرض کرو $لا = ۶ + و$ .... (۲)

$\therefore ۶^۳ + و^۳ + ۳(۶ + و)(۶و - ۲) - ۹ = ۰$ ...... (۳)

۶ اور و ایسے منتخب کرو کہ $۶و - ۲ = ۰$ .... (۴)

$\therefore ۶^۳ + و^۳ - ۹ = ۰$ .... (۵) ازروئے (۳) اور (۴)

(۴) اور (۵) کے مابین و کو ساقط کرو -

$$\therefore ۶^۳ + \frac{۸}{۶^۳} - ۹ = ۰$$

$$یعنی \quad ۶^۶ - ۹۶^۳ + ۸ = ۰$$

$$\therefore ۶^۳ = ۱ \text{ اور اس لیے } ۶ = ۱، سہ، سہ^۲$$

پس و کی تمناظر قیمتیں رابطہ (۴) کی رُو سے

$و = ۲، ۲سہ^۲، ۲سہ$ ہونگی -

پس دی ہوئی مساوات کی تین اصلیں ۳، سہ + ۲سہ^۲، سہ^۲ + ۲سہ ہیں -

تیرھویں باب کی مثالیں

(۱) - ھورنر کے تقریبی طریقہ سے ذیل کی مساواتوں کی مثبت اصلیں اعشاریہ کے

چوتھے مقام تک دریافت کرو:۔

(ا) لا^{4} + لا^{3} − ۴لا^{2} − ۱۶ = ۰

(ب) لا^{5} − ۲ = ۰

(ج) لا^{3} − ۴۹لا^{2} + ۶۵۸لا − ۱۳۷۹ = ۰

(۲) لا^{5} + لا^{4} − ۴لا^{3} − ۳لا^{2} + ۳لا + ۱ = ۰ کی منفی اصل (جو صفر اور -۱ کے درمیان واقع ہے) دریافت کرو۔

(۳) لا^{4} − ۷لا^{3} − ۱۷لا^{2} + ۳۰ = ۰ کی حقیقی اصلیں اعشاریہ کے تیسرے مقام تک دریافت کرو۔

(۴) مساوات ۸لا^{3} − ۶۰لا^{2} + ۱۰۲لا + ۶۷ = ۰ کو حل کرو۔

(۵) ذیل کی کعبی مساواتوں کو جبری طریقہ سے حل کرو:۔

(ا) لا^{3} − ۱۲لا + ۶۵ = ۰

(ب) لا^{3} − ۴۸لا − ۵۲۰ = ۰

(ج) لا^{3} − ۲لا + ۵ = ۰

(۶) فین ڈیر وال (Van der Waals) کی مساوات

$$\left(\text{د} + \frac{\text{ا}}{\text{ح}^{2}}\right)(\text{ح} - \text{ب}) = \text{مرت}$$

کو (جس میں د اور ح گیس کا دباؤ اور حجم ہیں، ت مطلق تپش اور ا، ب، مر مستقل مقادیر ہیں) بطور ح کی کعبی مساوات کے ترتیب دے کر حل کرو جبکہ اس کی تینوں اصلیں حقیقی اور مساوی ہیں یعنے گیس کا فاصل (Critical) حجم دریافت کرو۔

[جواب = ۳ب]

(۷) اس طرح کلاؤسیوس (Clausius) کی مساوات

$$\text{د} = \frac{\text{مرت}}{(\text{ح} - \text{عہ})} - \frac{\text{ک}}{\text{ت}(\text{ح} + \text{بہ})^{2}}$$

کو (جس میں د ح اور ت بالترتیب گیس کا دباؤ، حجم اور مطلق تپش ہیں اور مر، عہ، بہ اور ک مستقل مقادیر ہیں) بطور ح کی کعبی مساوات کے ترتیب دے کر بتاؤ کہ گیس کا فاصل حجم ۳عہ + ۲بہ ہے۔

چودھواں باب

مثلثی سلسلوں کے حاصل جمع جب لا اور جم لا کے سلسلے اور زائدی تفاعیل

۶۹ - (ا) سلسلہ جم عہ + جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) + ...

کی ن رقموں کا حاصل جمع -

فرض کرو سن = جم عہ + جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) + ... ن رقموں تک

اس سلسلہ کی عام رقم یعنے ر-ویں رقم جم {عہ + (ر - ۱) بہ} ہے -

∴ سن = جم عہ + جم (عہ + بہ) + ... جم {عہ + (ر - ۱) بہ} + ...

+ جم {عہ + (ن - ۱) بہ}

اس مساوات کے دونوں ارکان کو ۲ جب بہ/۲ سے ضرب دو۔

تب ۲ سن جب بہ/۲ = ۲ جم عہ جب بہ/۲ + ۲ جم (عہ + بہ) جب بہ/۲ + ...

+ ۲ جم {عہ + (ر - ۱) بہ} جب بہ/۲ + ...

+ ۲ جم {عہ + (ن - ۱) بہ} جب بہ/۲

۲ جب بہ/۲ سن = جب (عہ + بہ/۲) - جب (عہ - بہ/۲)

+ جب (عہ + ۳ بہ/۲) - جب (عہ + بہ/۲)

+ جب (عہ + ۵بہ/۲) - جب (عہ + ۳بہ/۲)

+ ....

+ جب{عہ + (۲ن-۱) بہ/۲} - جب{عہ + (۲ن-۳) بہ/۲}

= جب{عہ + (۲ن-۱) بہ/۲} - جب (عہ - بہ/۲)

∴ سن = ۲ جم{عہ + (ن-۱) بہ/۲} جب نبہ/۲ ÷ جب بہ/۲

(ب) سلسلہ جب عہ + جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) + ...
کی ن رقموں کا حاصل جمع۔

فرض کرو سن = جب عہ + جب (عہ + بہ) + ...

+ جب{عہ + (ن - ۱) بہ}

مساوات کے دونوں ارکان کو ۲ جب بہ/۲ سے ضرب دو۔

تب ۲ جب بہ/۲ سن = ۲ جب عہ جب بہ/۲ + ۲ جب (عہ + بہ) جب بہ/۲ + ...

+ ۲ جب{عہ + (ن-۱) بہ} جب بہ/۲

= جم (عہ - بہ/۲) - جم (عہ + بہ/۲)

+ جم (عہ + بہ/۲) - جم (عہ + ۳بہ/۲)

+ ....

+ جم{عہ + ((۲ن-۳)/۲) بہ} - جم{عہ + ((۲ن-۱)/۲) بہ}

= جم (عہ - بہ/۲) - جم{عہ + (ن - ۱/۲) بہ}

$$\therefore \text{س}_\text{ن} = \frac{\text{جب}\left\{\text{عہ} + (\text{ن}-1)\frac{\text{بہ}}{2}\right\} \text{جب} \frac{\text{ن بہ}}{2}}{\text{جب} \frac{\text{بہ}}{2}}$$

سوالات ۱۴ (۱)

(۱) مندرجۂ ذیل سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو:-

(ل) جم ۲ طہ + جم ۴ طہ + جم ۶ طہ + ...

(ب) جب طہ + جب ۳ طہ + جب ۵ طہ + ...

(۲) ذیل کے سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو:-

(ل) جم عہ - جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) - جم (عہ + ۳ بہ) + ...

(ب) جب عہ - جب (عہ + بہ) + جب (عہ + ۲ بہ) - جب (عہ + ۳ بہ) + ...

[ہدایت - بہ = π + بہ' لکھو]

(۳) ذیل کے سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو:-

(ل) جم^2 طہ + جم^2 ۲ طہ + جم^2 ۳ طہ + ...

(ب) جب^2 طہ + جب^2 ۲ طہ + جب^2 ۳ طہ + ...

[ہدایت - $\text{جم}^2 \text{ر طہ} = \frac{1 + \text{جم ۲ ر طہ}}{2}$

اور $\text{جب}^2 \text{ر طہ} = \frac{1 - \text{جم ۲ ر طہ}}{2}$ لکھو]

(۴) ثابت کرو کہ

$$\text{مس ن طہ} = \frac{\text{جب طہ} + \text{جب ۳ طہ} + \text{جب ۵ طہ} + \ldots + \text{جب (۲ ن - ۱) طہ}}{\text{جم طہ} + \text{جم ۳ طہ} + \text{جم ۵ طہ} + \ldots + \text{جم (۲ ن - ۱) طہ}}$$

(ج) سلسلہ قم طہ + قم ۲ طہ + قم ۴ طہ + ... کی ن رقموں کا

حاصل جمع -

چونکہ $\text{قم طہ} - \text{حم} \frac{\text{طہ}}{2} = \frac{1}{2\,\text{جب} \frac{\text{طہ}}{2}\,\text{جم} \frac{\text{طہ}}{2}} - \frac{\text{جم} \frac{\text{طہ}}{2}}{\text{جب} \frac{\text{طہ}}{2}}$

$$= \frac{\text{۱ - جم}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲}}{\text{۲ جب}\frac{\text{ط}}{۲}\text{ جم}\frac{\text{ط}}{۲}} = -\text{ مم ط}$$

∴ $\text{قم ط} = \text{مم}\frac{\text{ط}}{۲} - \text{مم ط}$ اسی طرح $\text{قم ۲ ط} = \text{مم ط} - \text{مم ۲ ط}$

$\text{قم ۴ ط} = \text{مم ۲ ط} - \text{مم ۴ ط}$ ......

....

اور $\text{قم ۲}^{\text{ن-۱}}\text{ ط} = \text{مم ۲}^{\text{ن-۲}}\text{ ط} - \text{مم ۲}^{\text{ن-۱}}\text{ ط}$

∴ $\sum_{\text{ر=۰}}^{\text{ن-۱}} \text{قم ۲}^{\text{ر}}\text{ ط} = \text{مم}\frac{\text{ط}}{۲} - \text{مم ۲}^{\text{ن-۱}}\text{ ط}$

سوالات ۱۴ (ب)

(۱) ثابت کرو کہ $\text{قم ط قم ۲ ط} = \text{قم ط}\left[\text{مم ط - مم ۲ ط}\right]$

$\text{قم ۲ ط قم ۳ ط} = \text{قم ط}\left[\text{مم ۲ ط - مم ۳ ط}\right]$، وغیرہ

اور ان کے ذریعے بتاؤ کہ $\sum_{\text{ر=۱}}^{\text{ن}} \text{قم ر ط قم (ر+۱) ط} = \text{قم ط}\left[\text{مم ط - مم (ن+۱) ط}\right]$

(۲) مندرجۂ ذیل سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو :—

(i) قم ط قم ۳ ط + قم ۳ ط قم ۵ ط + ...

(ii) جم ط جم ۲ ط + جم ۲ ط جم ۳ ط + ...

(iii) جم ط جب ۲ ط + جم ۲ ط جب ۳ ط + ...

(د) سلسلہ $\text{ح}_{\text{۰}}\text{ جم عہ} + \text{ح}_{\text{۱}}\text{ جم (عہ + بہ)} + \text{ح}_{\text{۲}}\text{ جم (عہ + ۲ بہ)} + \ldots$

کی ن رقموں کا حاصل جمع جبکہ $\text{ح}_{\text{۰}}$، $\text{ح}_{\text{۱}}$ .... ایک سلسلۂ حسابیہ ہو۔

فرض کرو $\text{س}_{\text{ن}} = \text{ح}_{\text{۰}}\text{ جم عہ} + \text{ح}_{\text{۱}}\text{ جم (عہ + بہ)} + \ldots\ldots$

$+ \text{ح}_{\text{ن-۱}}\text{ جم}\left\{\text{عہ + (ن-۱) بہ}\right\}$

تب ۲ جم ب س$_{ن}$ = ح$_{۰}$ {جم (عہ + ب) + جم (عہ − ب)}

+ ح$_{۱}$ {جم (عہ + ۲ب) + جم عہ}

+ ح$_{۲}$ {جم (عہ + ۳ب) + جم (عہ + ب)}

. . . .

+ ح$_{ن-۱}$ [جم (عہ + ن ب) + جم {عہ + (ن − ۲) ب}]

∴ ۲ (۱ − جم ب) س$_{ن}$ = (۲ح$_{۰}$ − ح$_{۱}$) جم عہ

+ (۲ح$_{۱}$ − ح$_{۰}$ − ح$_{۲}$) جم (عہ + ب)

+ (۲ح$_{۲}$ − ح$_{۱}$ − ح$_{۳}$) جم (عہ + ۲ب)

+ . . . .

+ (۲ح$_{ن-۲}$ − ح$_{ن-۳}$ − ح$_{ن-۱}$) جم {عہ + (ن − ۲) ب}

+ (۲ح$_{ن-۱}$ − ح$_{ن-۲}$) جم {عہ + (ن − ۱) ب}

− ح$_{۰}$ جم (عہ − ب) − ح$_{ن-۱}$ جم (عہ + ن ب)

لیکن اگر ح$_{۰}$، ح$_{۱}$، ح$_{۲}$ .... سلسلہ حسابیہ میں ہوں، تو

۲ح$_{ر}$ = ح$_{ر-۱}$ + ح$_{ر+۱}$

∴ ۲ (۱ − جم ب) س$_{ن}$ = (۲ح$_{۰}$ − ح$_{۱}$) جم عہ + (۲ح$_{ن-۱}$ − ح$_{ن-۲}$) جم {عہ + (ن − ۱) ب}

− ح$_{۰}$ جم (عہ − ب) − ح$_{ن-۱}$ جم (عہ + ن ب)

جس سے س$_{ن}$ کی قیمت برآمد ہو جاتی ہے۔

طالب علم کو چاہیے کہ اس طرح سلسلہ

ح$_{۰}$ جب عہ + ح$_{۱}$ جب (عہ + ب) + ح$_{۲}$ جب (عہ + ۲ب) + ...

کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرے جبکہ ح، ح ...... ایک سلسلۂ حسابیہ ہو۔

سوالات ۱۴ (ج)

مندرجۂ ذیل سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

(۱) جم طہ + ۲ جم ۲ طہ + ۳ جم ۳ طہ + ...

(۲) جب طہ + ۲ جب ۲ طہ + ۳ جب ۳ طہ + ...

(۳) جم طہ − ۲ جم ۲ طہ + ۳ جم ۳ طہ − ......

(۴) جب طہ − ۲ جب ۲ طہ + ۳ جب ۳ طہ − ......

(ھ) زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے پھیلاؤ زاویہ کی صحیح دی قوتوں کے سلسلوں میں۔

لا کی تمام قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{\text{لا}^{۵}}{\lfloor ۵} - \ldots\ldots = \sum_{\text{ر}=۰}^{\infty} (-۱)^{\text{ر}} \frac{\text{لا}^{۲\text{ر}+۱}}{\lfloor (۲\text{ر}+۱)}$$

$$\text{اور جم لا} = ۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{\text{لا}^{۴}}{\lfloor ۴} - \ldots\ldots = \sum_{\text{ر}=۰}^{\infty} (-۱)^{\text{ر}} \frac{\text{لا}^{۲\text{ر}}}{\lfloor ۲\text{ر}}$$

ان مسائل کا مستند باضابطہ ثبوت ھابسن (Hobson)، برامِ وِچ (Bromwich) وغیرہ کی کتابوں میں درج ہے۔ ابتدائی احصار کے ذریعہ بھی ان کو ثابت کر سکتے ہیں لیکن طبیعیات کے طالب علم کے لیے ایسی باضابطگی کی چنداں ضرورت نہیں ہے۔ اس لیے یہاں ڈی مواور کے مسئلہ کے ذریعہ ہی سرسری ثبوت پیش کیے جاتے ہیں :—

صفحہ ۸۹ پر فصل ۴۷ میں بتایا گیا ہے کہ

$$\text{جب ن طہ} = \text{ن جب طہ جم}^{\text{ن}-۱}\text{طہ} - \frac{\text{ن(ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\lfloor ۳}\text{جب}^{۳}\text{طہ جم}^{\text{ن}-۳}\text{طہ} + \ldots$$

$$\text{اور جم ن طہ} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ} - \frac{\text{ن(ن}-۱)}{\underline{|۲}}\,\text{جب}^{۲}\text{طہ جم}^{\text{ن}-۲}\text{طہ} + \ldots\ldots$$

اول الذکر سلسلہ کی رقموں کی تعداد $\frac{۱}{۲}$ ن ہے جبکہ ن ایک جفت عدد ہے، اور $\frac{۱}{۲}$ (ن + ۱) جبکہ ن طاق عدد ہے - آخرالذکر سلسلہ میں $\frac{۱}{۲}$ ن + ۱ رقمیں ہیں جبکہ ن جفت عدد ہے اور $\frac{۱}{۲}$ (ن + ۱) جبکہ ن طاق ہے -

$$\text{پس جب ن طہ} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ}\left[\text{ن مس طہ} - \frac{\text{ن(ن}-۱)(\text{ن}-۲)}{\underline{|۳}}\,\text{مس}^{۳}\text{طہ} + \ldots\ldots\right]$$

$$= \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ}\left[\text{ن مس طہ} - \frac{(۱-\frac{۱}{\text{ن}})(۱-\frac{۲}{\text{ن}})}{\underline{|۳}}(\text{ن مس طہ})^{۳} + \ldots\ldots\right]$$

$$\text{اور جم ن طہ} = \text{جم}^{\text{ن}}\text{طہ}\left[۱ - \frac{(۱-\frac{۱}{\text{ن}})}{\underline{|۲}}(\text{ن مس طہ})^{۲} + \frac{(۱-\frac{۱}{\text{ن}})(۱-\frac{۲}{\text{ن}})(۱-\frac{۳}{\text{ن}})}{\underline{|۴}}(\text{ن مس طہ})^{۴} - \ldots\ldots\right]$$

فرض کرو کہ لا کوئی ایک مثبت عدد ہے اور ن طہ = لا لکھو - تب

$$\text{جب لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\left[\text{ن مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} - (۱-\frac{۱}{\text{ن}})(۱-\frac{۲}{\text{ن}})(\text{ن مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}})^{۳} + \ldots\ldots\right] \quad (۱)$$

$$\text{اور جم لا} = \text{جم}^{\text{ن}}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\left[۱ - \frac{(۱-\frac{۱}{\text{ن}})}{\underline{|۲}}(\text{ن مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}})^{۲} + \frac{(۱-\frac{۱}{\text{ن}})(۱-\frac{۲}{\text{ن}})(۱-\frac{۳}{\text{ن}})}{\underline{|۴}}(\text{ن مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}})^{۴} - \ldots\ldots\right] \quad (۲)$$

$$\text{لیکن}\quad \text{نہا}_{\text{لا}\to ۰}\left(\frac{\text{مس لا}}{\text{لا}}\right) = ۱$$

$$\text{پس}\quad \text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\left(\text{ن مس}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right) = \text{لا}$$

اور $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(\text{جم}^{\text{ن}}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right) = ۱$

[اگرچہ واضح ہے کہ $\underset{\text{لا}\to}{\text{نہا}}\left(\text{جم}^{\text{ن}}\ \text{لا}\right) = ۱$ جبکہ ن کوئی معین قیمت کا عدد ہے

تاہم

$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(\text{جم}^{\text{ن}}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right) = ۱$ ثبوت کا محتاج ہے۔

فرض کرو $\quad \text{ما} = \text{جم}^{\text{ن}}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}} = \left(\text{جم}^{۲}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\frac{\text{ن}}{۲}}$

تب $\quad \text{لوک ما} = \frac{\text{ن}}{۲}\ \text{لوک}\left(۱ - \text{جب}^{۲}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)$

لیکن ہم جانتے ہیں کہ $۰ < \frac{-\text{لوک}(۱-\text{ھ})}{\text{ھ}} = ۱ + \frac{\text{ھ}}{۲} + \frac{\text{ھ}^{۲}}{۳} + \dots$ جبکہ $۰ < \text{ھ} < ۱$

$< ۱ + \frac{۱}{۲۲} + \frac{۱}{۳۲} + \dots$ جبکہ $۰ < \text{ھ} < \frac{۱}{۲}$

$< \frac{۳}{۲}$

پس $\left|\text{لوک}(۱-\text{ھ})\right| < \frac{۳}{۲}\ \text{ھ}$ جبکہ $۰ < \text{ھ} < \frac{۱}{۲}$

$\therefore \quad \left|\text{لوک ما}\right| = \frac{\text{ن}}{۲}\left|\text{لوک}\left(۱ - \text{جب}^{۲}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)\right|$

$< \frac{۳}{۴}\ \text{ن}\ \text{جب}^{۲}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ ، جبکہ $\text{جب}^{۲}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \frac{۱}{۲}$

$< \frac{۳\ \text{لا}^{۲}}{۴\ \text{ن}}$ چونکہ $\text{جب}^{۲}\ \frac{\text{لا}}{\text{ن}} < \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ن}^{۲}}$

اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{لوک ما} = ۰$ اور اس لیے $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ما} = ۱$]

(و) زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے لیے آئلر (Euler) کے قوت نمائی جملے۔

عدد و کی تعریف قوت نمائی سلسلہ $۱ + ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \dots$

سے کی جا کر فصل (۳۴) میں (دیکھو صفحہ ۷۰) بتایا گیا ہے کہ جب لا کوئی سا حقیقی عدد ہوتا ہے تو

$$\text{و}^{\text{لا}} = \text{۱} + \text{لا} + \frac{\text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۲}!} + \frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}!} + \cdots\cdots$$

اور یہ سلسلہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے مستدق ہوتا ہے
اگر خیالی متغیر ی = لا + خ ما استعمال کیا جاتا ہے تو سلسلہ

$$\text{۱} + \text{ی} + \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{۲}!} + \frac{\text{ی}^{\text{۳}}}{\text{۳}!} + \cdots\cdots \text{ کو بشکل}$$

$$\text{۱} + \text{ر}\,(\text{جم طہ} + \text{خ جب طہ}) + \frac{\text{ر}^{\text{۲}}}{\text{۲}!}\,(\text{جم ۲ طہ} + \text{خ جب ۲ طہ}) + \cdots\cdots$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں

$$\text{ر} = \sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}}} \quad \text{اور مس طہ} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

$$\text{پس سلسلہ } \text{۱} + \text{ی} + \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{۲}!} + \frac{\text{ی}^{\text{۳}}}{\text{۳}!} + \cdots \text{ کی ن رقموں کا حاصل جمع}$$

$$\left[\text{۱} + \text{رجم طہ} + \frac{\text{ر}^{\text{۲}}}{\text{۲}!}\,\text{جم ۲ طہ} + \cdots\cdots \frac{\text{ر}^{\text{ن-۱}}}{(\text{ن-۱})!}\,\text{جم}\,(\text{ن} - \text{۱})\,\text{طہ}\right.$$

$$\left.+\ \text{خ}\left[\text{رجب طہ} + \frac{\text{ر}^{\text{۲}}}{\text{۲}!}\,\text{جب ۲ طہ} + \cdots\cdots \frac{\text{ر}^{\text{ن-۱}}}{(\text{ن-۱})!}\,\text{جب}\,(\text{ن} - \text{۱})\,\text{طہ}\right] \text{ ہے}\right.$$

اوپر کے دونوں جملے ر اور طہ کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہوتے ہیں۔ اس لیے ن رقموں کے حاصل جمع کی انتہا وجود رکھتی ہے اور سلسلہ

$$\text{۱} + \text{ی} + \frac{\text{ی}^{\text{۲}}}{\text{۲}!} + \frac{\text{ی}^{\text{۳}}}{\text{۳}!} + \cdots\cdots$$

کو وی کی تعریف تصور کر سکتے ہیں، جبکہ ی = لا + خ ما

یعنی $\text{و}^{\text{خ لا}} \equiv ۱ + \text{خ لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} - \frac{۲\,\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} + \frac{\text{خ لا}^{۵}}{\underline{|۵}} - \frac{\text{لا}^{۶}}{\underline{|۶}} - \frac{\text{خ لا}^{۷}}{\underline{|۷}} + \cdots\cdots$

اور $\text{و}^{-\text{خ لا}} \equiv ۱ - \text{خ لا} - \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{خ لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} - \frac{\text{خ لا}^{۵}}{\underline{|۵}} - \frac{\text{لا}^{۶}}{\underline{|۶}} + \frac{\text{خ لا}^{۷}}{\underline{|۷}} + \cdots\cdots$

پس $\text{و}^{\text{خ لا}} + \text{و}^{-\text{خ لا}} = ۲\left(۱ - \frac{\text{لا}^{۲}}{\underline{|۲}} + \frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} - \frac{\text{لا}^{۶}}{\underline{|۶}} + \cdots\cdots\right)$

اور $\text{و}^{\text{خ لا}} - \text{و}^{-\text{خ لا}} = ۲\,\text{خ}\left(\text{لا} - \frac{\text{لا}^{۳}}{\underline{|۳}} + \frac{\text{لا}^{۵}}{\underline{|۵}} - \frac{\text{لا}^{۷}}{\underline{|۷}} + \cdots\cdots\right)$

یعنی $\text{جم لا} = \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} + \text{و}^{-\text{خ لا}}}{۲}$ اور $\text{جب لا} = \frac{\text{و}^{\text{خ لا}} - \text{و}^{-\text{خ لا}}}{۲\,\text{خ}}$

پانچویں باب کے اکثر مسائل مصرحۂ بالا روابط کی مدد سے بڑی آسانی کے ساتھ حل ہو سکتے تھے۔ لیکن طالب علم کی موجودہ حالت میں ان کا براہِ راست بغیر مدد خیالی مقادیر ثابت کرنا زیادہ سود مند ہے۔

جم لا اور جب لا کے لیے ابھی ابھی جو قوت نمائی جملے اخذ کیے گئے ہیں ان کی مدد سے بآسانی بتایا جا سکتا ہے کہ زاویوں کے حاصل جمع یا حاصل تفریق کے مستدیر تفاعلوں کے ضابطے نہ صرف حقیقی زاویوں کے لیے صادق آتے ہیں بلکہ خیالی زاویوں پر بھی حاوی ہیں۔

یعنی $\text{جب}\,(\text{لا} + \text{ما}) = \text{جب لا جم ما} + \text{جم لا جب ما}$

$\text{جب}\,(\text{لا} - \text{ما}) = \text{جب لا جم ما} - \text{جم لا جب ما}$

$\text{جم}\,(\text{لا} + \text{ما}) = \text{جم لا جم ما} - \text{جب لا جم ما}$

$\text{جم}\,(\text{لا} - \text{ما}) = \text{جم لا جم ما} + \text{جب لا جم ما}$

ان کا ثبوت طالب علم کی مشق کے لیے چھوڑ دیا جاتا ہے۔ ثبوت میں فرض کر لیا جا سکتا ہے کہ رابطہ $\text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{\text{ما}} = \text{و}^{\text{لا}+\text{ما}}$ اس صورت میں بھی صحیح ہے

جبکہ لا اور ما ملتف مقادیر ہیں۔ اس طرح جو ضابطے جمع اور تفریق کے مسائل پر مبنی اور حقیقی زاویوں کے لیے ثابت ہو چکے ہیں ملتف مقادیر کے لیے بھی صادق آتے ہیں۔

۷۰۔ زائدی تفاعیل۔

تعریف۔ مقدار $\frac{و^{ما} - و^{-ما}}{۲}$ خواہ ما حقیقی ہو یا ملتف ما کی زائدی جیب کہلاتی ہے اور جبز ما لکھی جاتی ہے۔

اسی طرح مقدار $\frac{و^{ما} + و^{-ما}}{۲}$ ما کی زائدی جیب التمام کہلاتی ہے اور جمز ما لکھی جاتی ہے۔

واضح ہو کہ زائدی مماس، قاطع، مماس التمام اور قاطع التمام زائدی جیب اور زائدی جیب التمام سے اس طرح حاصل کیے جاتے ہیں جیسا کہ معمولی مماس، قاطع، مماس التمام اور قاطع التمام معمولی جیب اور جیب التمام سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

چنانچہ $$\text{مسز ما} = \frac{\text{جبز ما}}{\text{جمز ما}} = \frac{و^{ما} - و^{-ما}}{و^{ما} + و^{-ما}}$$

$$\text{قطز ما} = \frac{۱}{\text{جمز ما}} = \frac{۲}{و^{ما} + و^{-ما}}$$

$$\text{ممز ما} = \frac{۱}{\text{مسز ما}} = \frac{و^{ما} + و^{-ما}}{و^{ما} - و^{-ما}}$$

$$\text{قمز ما} = \frac{۱}{\text{جبز ما}} = \frac{۲}{و^{ما} - و^{-ما}}$$

(۱) زائدی جیب التمام اور زائدی جیب کو قائم قطع زائد کے ساتھ وہی رابطہ و تعلق ہے جو معمولی مستدیر جیب التمام اور جیب کو دائرہ کے ساتھ ہے۔

واضح ہے کہ جبز ما اور جمز ما کی قیمتیں جب ما اور جم ما کے قوت نمائی جملوں سے محض علامت خیالی (خ) متروک کردینے سے حاصل ہوتی ہیں۔

(۲) چونکہ $\text{خ}^{2} = -1$ لہذا

$$\text{جم ما خ} = \frac{\text{و}^{\text{ما خ.خ}} + \text{و}^{-\text{ما خ.خ}}}{2}$$

$$= \frac{\text{و}^{-\text{ما}} + \text{و}^{\text{ما}}}{2} = \frac{\text{و}^{\text{ما}} + \text{و}^{-\text{ما}}}{2} \equiv \text{جمز ما}$$

اور

$$\text{جب ما خ} = \frac{\text{و}^{\text{ما خ.خ}} - \text{و}^{-\text{ما خ.خ}}}{2\,\text{خ}}$$

$$= \frac{\text{و}^{-\text{ما}} - \text{و}^{\text{ما}}}{2\,\text{خ}} = \text{خ}\,\frac{\text{و}^{-\text{ما}} - \text{و}^{\text{ما}}}{2\,(-1)}$$

$$= \text{خ}\,\frac{\text{و}^{\text{ما}} - \text{و}^{-\text{ما}}}{2} \equiv \text{خ جبز ما}$$

یعنے جم (ما خ) = جمز ما، جب (ما خ) = خ جبز ما اور مس (ما خ) = مسز ما

(۳) پس مصرحۂ بالا روابط سے براہ راست یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ جو کوئی عام ضابطہ زاویوں کی جیوب التمام سے متعلق ہے اگر اس میں بجائے جم کے جمز لکھا جائے تو بھی صحیح رہیگا۔

نیز ہر وہ عام ضابطہ جس میں کسی زاویہ کی جیب التمام اور مربع جیب شامل ہیں صحیح ہے اگر جم کی بجائے جمز اور جب² کی بجائے ۔جبز² لکھا جائے۔ اسی طرح مس² کے ضابطے بھی صحیح رہتے ہیں اگر مس² کے عوض ۔مسز² لکھا جائے۔

(۴) چونکہ $\text{جمز لا} = \frac{1}{2}\left(\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}\right)$ اور $\text{جبز لا} = \frac{1}{2}\left(\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}\right)$

$\text{و}^{\text{لا}}$ اور $\text{و}^{-\text{لا}}$ کو ۸۵ کے بموجب پھیلانے سے

$$\text{جمز لا} = 1 + \frac{\text{لا}^{2}}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^{4}}{\lfloor 4} + \frac{\text{لا}^{6}}{\lfloor 6} + \cdots\cdots$$

اور　جبز لا = لا + لا³/۳! + لا⁵/۵! + لا⁷/۷! + ...

مثال (۱) جملہ مس (عہ + بہ خ) کے حقیقی اور خیالی حصص کو علٰحدہ کرو۔

مس (عہ + بہ خ) = جب (عہ + بہ خ) / جم (عہ + بہ خ)

= ۲ جب (عہ + بہ خ) جم (عہ − بہ خ) / ۲ جم (عہ + بہ خ) جم (عہ − بہ خ)

= (جب ۲ عہ + جب ۲ بہ خ) / (جم ۲ عہ + جم ۲ بہ خ) = (جب ۲ عہ + خ جبز ۲ بہ) / (جم ۲ عہ + جمز ۲ بہ)

مثال (۲) جملہ جمز (عہ + بہ خ) کے حقیقی اور خیالی حصص کو علٰحدہ کرو۔

جمز (عہ + بہ خ) = جم {(عہ + بہ خ) خ} = جم (عہ خ − بہ)

= جم (عہ خ) جم بہ + جب (عہ خ) جب بہ

= جمز عہ جم بہ + خ جبز عہ جب بہ

چودھویں باب کی مثالیں

(۱) جم لا اور جب لا کے لیے قوت نمائی جملے استعمال کرکے مندرجۂ ذیل ضابطے ثابت کرو لا اور ما حقیقی ہوں یا ملتف

(ا) جم² لا + جب² لا = ۱

(ب) جم ۲ لا = جم² لا − جب² لا = ۱ − ۲ جب² لا

(ج) جب ۳ لا = ۳ جب لا − ۴ جب³ لا

(د) جم لا − جم ما = ۲ جب (لا + ما)/۲ جب (ما − لا)/۲

(ھ) جب لا − جب ما = ۲ جم (لا + ما)/۲ جب (لا − ما)/۲

(۲) ثابت کرو کہ

(ا) جمز (عہ + بہ) = جمز عہ جمز بہ + جیز عہ جیز بہ

(ب) جمز (عہ + بہ) − (جمز عہ − بہ) = ۲ جیز عہ جیز بہ

(ج) جمز لا + جمز (لا + ما) + جمز (لا + ۲ ما) + ... ن رقموں تک

$$= \frac{\text{جمز}\left(\text{لا} + \frac{\text{ن} - ۱}{۲}\,\text{ما}\right)\ \text{جیز}\ \frac{\text{ن ما}}{۲}}{\text{جیز}\ \frac{\text{ما}}{۲}}$$

(د) جیز لا + جیز (لا + ما) + جیز (لا + ۲ ما) + ... ن رقموں تک

$$= \frac{\text{جیز}\left(\text{لا} + \frac{\text{ن} - ۱}{۲}\,\text{ما}\right)\ \text{جیز}\ \frac{\text{ن ما}}{۲}}{\text{جیز}\ \frac{\text{ما}}{۲}}$$

(۳) اگر جب (ا + خ ب) = لا + خ ما تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{جمز}^{۲}\,\text{ب}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{جیز}^{۲}\,\text{ب}} = ۱ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{جب}^{۲}\,\text{ا}} - \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{جم}^{۲}\,\text{ا}} = ۱$$

(۴) اگر مس (ا + خ ب) = لا + خ ما تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + ۲\,\text{لا}\ \text{مم}\ ۲\text{ا} = ۱ \quad \text{اور} \quad \text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} - ۲\,\text{ما}\ \text{ممز}\ ۲\text{ب} + ۱ = ۰$$

(۵) ثابت کرو کہ

(ا) $\frac{۱}{۲}(\text{جیز لا} + \text{جب لا}) = \text{لا} + \frac{\text{لا}^{۵}}{\underline{|۵}} + \frac{\text{لا}^{۹}}{\underline{|۹}} + \ldots\ldots$ تا بہ لا تناہی

(ب) $\frac{۱}{۲}(\text{جمز لا} + \text{جم لا}) = ۱ + \frac{\text{لا}^{۴}}{\underline{|۴}} + \frac{\text{لا}^{۸}}{\underline{|۸}} + \ldots\ldots$ تا بہ لا تناہی

جوابات
نصاب ذیلی ریاضی
حصۂ اول

پہلا باب (ا)

(۱) چوتھی اور پانچویں رقم۔ قیمت = $\frac{۷}{۱۴۴}$

(۴) ۲۴۷۲

ایضاً (ب)

(۱) مثبت تیسری رقم سے شروع ہوتا ہے۔

(۲) آٹھویں رقم

(۳) $-\frac{۱۹۷۱۲}{۳}$ لا^{۹}

ایضاً (ج)

(۱) ۱۰،۰۰۰۹۹۹ (۲) ۰،۰۰۷۹۵

(۳) $\frac{۱}{۴} - \frac{۵}{۹}$ لا (۴) $۱ - \frac{۳۴۳}{۱۲۰}$ لا

(۶) صفر

دوسرا باب

(۱) $\frac{۱}{۱-۲لا} + \frac{۳}{۱-۳لا}$ (۲) $\frac{۹}{۴(لا-۱)} - \frac{۵}{۲(لا-۱)}$

(۳) $\frac{۷لا+۹}{۲(لا^{۲}+۲لا+۵)} - \frac{۱}{۲(لا+۱)}$

(۴) $\frac{ل + \sqrt{۲} - ۱}{۲\sqrt{۲}(ل^۲ + \sqrt{۲}ل + ۱)} - \frac{ل - \sqrt{۲} - ۱}{۲\sqrt{۲}(ل^۲ - \sqrt{۲}ل + ۱)}$

(۵) $\frac{۱}{۱۲(ل + ۱)} - \frac{۷}{۳(ل - ۲)} + \frac{۱۳}{۴(ل - ۳)}$

(۶) $\frac{۱}{۱ - ۱۰ل} + \frac{۱}{۳(۱ + ۳ل)} - \frac{۱}{۳(۱ + ۳ل)^۲}$

(۷) $\frac{۲}{(ل - ۲)^۲} + \frac{۴}{۵(ل - ۲)} + \frac{ل + ۲}{۵(ل^۲ + ۱)}$

(۸) $\frac{۱}{۸ل^۲} - \frac{۱}{۱۶ل} - \frac{۱}{ل + ۱} + \frac{۱۷}{۱۶(ل + ۲)}$

$+ \frac{۱}{(ل + ۲)^۲} + \frac{۳}{۴(ل + ۲)^۳}$

(۱۰) $\frac{۴}{۹}\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{ن+۱} - \frac{۱}{۹}(۳ل + ۷)$

تیسرا باب

(۱) ۴　(۲) ۵۰۴۰　(۳) -۲۰۴　(۴) ۳

(۵) $اب ج + ۲ ف گ ح - ا ف^۲ - ب گ^۲ - ج ح^۲$

(۶) $۲ ا_۱ ا_۲ ج_۱ ج_۲ + ا_۱ ب_۱ ب_۲ ج_۲ + ا_۲ ب_۱ ب_۲ ج_۱$

$- ا_۱^۲ ج_۲^۲ - ا_۲^۲ ج_۱^۲ - ا_۱ ب_۲^۲ ج_۱ - ا_۲ ب_۱^۲ ج_۲$

(۱۰) $ل = \frac{۸۶۵}{۲۰۳}$، $م = \frac{۷۹}{۲۰۳}$، $ی = -\frac{۳۱۱}{۲۰۳}$

(۱۱) $ل = \frac{۲۲}{۴۱}$، $م = \frac{۱۸}{۴۱}$، $ی = \frac{۱}{۴۱}$

(۱۲) $ل_۱ = ۰$، $ل_۲ = ۰$، $ل_۳ : ل_۴ = ۳ : ۲$

(۱۷) $ع = ۰$ یا ۲، $ل = ۰$ یا ۲، $م = ۰$ یا ۱۰

چوتھا باب (۱) ۱۱۴۶٫۷۴ پونڈ (۳) ۴۲٫۷ پونڈ ۱۹ شلنگ ۶ پنس
(۵) ۸۵٫۷ پونڈ ۱۰ شلنگ (۶) ۱۹۷۹ پونڈ ۵ شلنگ ۶ پنس
(۷) ۱۷۳۵ پونڈ تقریباً

پانچواں باب (ف) ± جم π/۴ ± خ جب π/۴ ،
جم π/۳ ± خ جب π/۳ ، — ۱

ساتواں باب [۳] (ا) لا^۲ + ما^۲ + ۵ما — ۳۰ = ۰
(ب) لا^۲ + ما^۲ + ۲لا + ۱۰ما + ۱ = ۰
(ج) لا^۲ + ما^۲ — ۵٫۱۰لا + ۴ما + ۳۰ = ۰

بارہواں باب [۱] (ا) خطِ مکافی، محور کا ڈھال ۱/۲، راس (۳۲/۳۵ ، — ۱۶/۳۵)
(ب) خطِ زائد، مرکز (۲ ، — ۳/۲)، محوروں کے ڈھال ۱ اور —۱
(ج) خطِ ناقص، مرکز (۲ ، —۱) محوروں کے ڈھال ۴/۳ اور — ۳/۴
(د) دو خطوطِ مستقیم جو نقطہ (۳ ، —۲) پر متقاطع ہوتے ہیں
اور جن کے ڈھال ۲/۳ اور — ۳/۲ ہیں۔
[۴] ۶لا^۲ — ۷لاما — ۳ما^۲ — ۲لا — ۸ما — ۴ = ۰

تیرہواں باب [۱] (ا) ۲٫۲۳۱۷ (ب) ۱٫۱۴۸۷
(ج) ۲٫۵۵۷۴
[۲] — ۰٫۲۸۴۶ [۳] ۱٫۱۲۶ اور ۸٫۸۷۳
[۴] — ۱/۲ ، ۱/۲ (۸ ± √۳ —)
[۵] (ا) — ۵ ، سہ — ۴ سہ^۲ ، — سہ^۲ — ۴ سہ
(ب) ۱۰ ، ۲ سہ + ۸ سہ^۲ ، ۲ سہ^۲ + ۸ سہ
(ج) ۸ ، سہ + ۷ سہ^۲ ، سہ^۲ + ۷ سہ

چودھواں باب ۔ ا

[۱] (ا) $\dfrac{\text{جم}\,(\text{ن}+1)\,\text{ط}\ \text{جب}\,\text{ن}\,\text{ط}}{\text{جب}\,\text{ط}}$

(ب) $\dfrac{\text{جب}\,\left(\frac{\text{ن}+1}{2}\right)\text{ط}\ \text{جب}\,\frac{\text{ن}\,\text{ط}}{2}}{\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2}}$

[۲] (ا) $\dfrac{\text{جم}\left\{\text{ع}+\frac{\text{ن}-1}{2}(\text{ب}+\pi)\right\}\text{جب}\,\frac{\text{ن}\,(\text{ب}+\pi)}{2}}{\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{2}}$

(ب) $\dfrac{\text{جب}\left\{\text{ع}+\frac{\text{ن}-1}{2}(\text{ب}+\pi)\right\}\text{جب}\,\frac{\text{ن}\,(\text{ب}+\pi)}{2}}{\text{جم}\,\frac{\text{ب}}{2}}$

[۳] (ا) $\dfrac{\text{ن}}{2}+\dfrac{\text{جم}\,(\text{ن}+1)\,\text{ط}\ \text{جب}\,\text{ن}\,\text{ط}}{2\,\text{جب}\,\text{ط}}$

(ب) $\dfrac{\text{ن}}{2}-\dfrac{\text{جم}\,(\text{ن}+1)\,\text{ط}\ \text{جب}\,\text{ن}\,\text{ط}}{2\,\text{جب}\,\text{ط}}$

ب [۲]

(۱) $\dfrac{\text{مم}\,\text{ط}-\text{مم}\,(2\,\text{ن}+1)\,\text{ط}}{\text{جب}\,2\,\text{ط}}$

(۲) $\text{ن}\,\text{جم}\,\text{ط}+\dfrac{\text{جم}\,(\text{ن}+2)\,\text{ط}\ \text{جب}\,\text{ن}\,\text{ط}}{\text{جب}\,\text{ط}}$

(۳) $\text{ن}\,\text{جب}\,\text{ط}+\dfrac{\text{جب}\,(\text{ن}+2)\,\text{ط}\ \text{جب}\,\text{ن}\,\text{ط}}{\text{جب}\,\text{ط}}$

ج (۱) $\dfrac{2\,\text{ن}\,\text{جب}\,\frac{2\,\text{ن}+1}{2}\,\text{ط}\ \text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2}-1}{2\,(1-\text{جم}\,\text{ط})}$

(۲) $\dfrac{\text{ن}\,\text{جم}\,\frac{2\,\text{ن}+1}{2}\,\text{ط}}{\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2}}$

(۳) — $\dfrac{١ + (-١)^{ن-١} ن \{ جم ن ط + جم (ن + ١) ط \}}{٢ (١ + جم ط)}$

(۴) $(-١)^{ن} \dfrac{ن \, جب \frac{٢ن + ١}{٢} ط}{جم \frac{ط}{٢}}$

فہرستِ اصطلاحات

نصابِ ریاضی

(حصۂ اول)

اُردو	انگریزی
A	
سالیانہ	Annuity
حسابی اوسط	Arithmetic mean (A. M.)
متقارب	Asymptote
محور	Axis
B	
مسئلہ ثنائی	Binomial theorem
برام وچ	Bromwich
C	
کارڈان	Cardan
کارٹیسی	Cartesian
کوشی	Cauchy
وتر	Chord
محیط	Circumference
کلاوسیوس	Clausius

اُردو	انگریزی
ہم محور	Co-axial
سر	Coefficient
ملتف	Complex
مخروطی	Conic
تراش مخروط	Conic section
مزدوج	Conjugate
باثبات	Consistent
نتیجۂ صریح	Corollary
قاطع التمام	Cosecant
جیب التمام	Cosine
مماس التمام	Cotangent
کوٹیز	Cotes
فاصل	Critical
کعبی	Cubic
منحنی	Curve
دَوری۔ دائری	Cyclic

اردو	انگریزی
	D
ڈالیمبر	D'Alembert
ڈی مؤاور	DeMoivre
نسب نما	Denominator
مقطّعہ	Determinant
ابعاد	Dimensions
مرتّب دائرہ	Director circle
مرتِب	Directrix
	E
خروج المرکز	Eccentricity
اجزائے ترکیبی	Elements
مسقط۔حاصل اسقاط	Eliminant
اسقاط	Elimination
قطع ناقص ۔ناقص	Ellipse
اضعاف متساویہ	Equimultiples
آئیلر	Euler
جُفت	Even
پھیلاؤ	Expansion
مسئلہ قوت نما	Exponential theorem
	F
ضربی	Factorial

اُردو	انگریزی
ماسکہ	Focus
	G
عام مساوات	General equation
ہندسی اوسط	Geometric mean (G.M.)
	H
موسیقی اوسط	Harmonic mean (H. M.)
ہابسن	Hobson
ہورنر	Horner
قطع زائد۔زائد	Hyperbola
زائدی تفاعل	Hyperbolic function
	I
خیالی	Imaginary
قوّت نما	Index
لاتناہی	Infinity
مقطوعہ	Intercept
	L
وتر خاص	Latus rectum
نہایت۔نہا	Limit
طریق	Locus
	M

اُردو	انگریزی
اعظم محور۔ محورِ اکبر	Major axis
اعشاریہ لوکارتمی	Mantissa
اقلّ محور۔ محورِ اصغر	Minor axis
مقیاس	Modulus
	N
عماد - معیّن	Normal
شمار کنندہ	Numerator
عددی	Numerical
	O
طاق	Odd
رُتبہ	Order
مبداء	Origin
	P
خطِ مکافی۔ مکافی	Parabola
متوازی الاضلاع	Parallelogram
جُزوی کسر	Partial fraction
عمود	Perpendicular
قطبی	Polar
قطبی محدّد	Polar co-ordinate
قطب	Pole
کثیر رقمی	Polynomial
ظلّ	Projection

اُردو	انگریزی
	Q
خارج قسمت	Quotient
	R
بنیادی محور	Radical axis
نیم قطر سمتی	Radius vector
حقیقی	Real
قائم زائد	Rectangular hyperbola
معیّن	Rhombus
	S
سارّس	Sarrus
قاطع	Secant
سلسلہ	Series
جیب	Sine
علامت زیرین - لاحقہ	Suffix
دائروں کا نظام	System of circles
	T
مماس	Tangent
مثلثی	Trigonometrical
	U
اِکائی	Unity
نامعلوم - مجہول	Unknown

اُردو	انگریزی
	V
سمتی	Vector
قیمت	Value
	W
صحیح عدد	Whole number
	X
محور لا	X-axis
	Y
محور ما	Y-axis
	Z
صفر	Zero

اغلاط نامہ

نصاب ریاضی

(برائے طبیعیات بی۔ اے)

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲	۱	$لا^{ن ۱۰}$	$لا^{(ن)-۱}$	۳۰	۱۳	[illegible]	س۳
۵	۹	$ن ج_{۲}$	$ن ج_{۳}$	〃	۱۸	دو، تین۔۔	دو، تین، ۔۔۔۔۔
۱۵و۱۶	۱۳و۹	$+(\frac{۲۹}{۳۲}$	$+(\frac{۳۹}{۳۲}$	۲۱	۶	$\times (ن)^{ن}$	$+ (ن)^{ن}$
۱۵	۱۶	$\frac{۳۱}{۸}$	$\frac{۲۱}{۸}$	۲۱	۱۴	$پ_{ر۱}$	$پ_{ر-۱}$
۱۶	۸	$(-\frac{۶}{۴}-۲)$	$(-\frac{۶}{۲}-۲)$	۲۱	۱۶	$پ_{ر-۲}$	$پ_{ر-۲}$
〃	۱۵	$\sqrt[۳]{۱۰۰۳}$	$\sqrt[۳]{۱۰۰۳}$	〃	۱۷	$پ$	$پ_{ر}$
۱۷	۳	$\frac{۳}{۴}(\quad \frac{۱}{۴}($	$\frac{۳}{۲}(\quad \frac{۱}{۲}($	۲۲	۵	$ر(+۲)$	$(ر+۲)$
۱۷	۸	$\frac{لا}{۴}$	$\frac{لا}{۲}$	〃	〃	$(۱+)^{ر-۱}$	$(۱-)^{ر-۱}$
۱۷	۱۷	$ن-ر+۱$	$ن-ر+۱$	۲۲	۶	$(ر+۲)-۳ر$	$(ر+۲)+۳ر$
۲۰	۲	$ر^{۳} لا^{۳}$	$ا^{۳} لا^{۳}$	۲۳	۱تا۲۵	ض	ضہ
〃	۷	$+ب^{۳} لا^{۴}+$	$+ب^{۳} لا^{۳}+$	۲۴	۱۸	$+د لا^{۳ر}+$	$+د لا^{۳}+$
〃	۸	$ج^{۴} لا^{۳}$	$ج^{۳} لا^{۳}$	۲۵	۱تا۲۵	ض	ضہ
〃	۱۰	$+ب^{۲} لا^{۳}+$	$+ب^{۲} لا^{۲}+$	〃	۹	$\frac{د}{ج} لا^{۲}+$	$\frac{د}{ج} لا^{۳}+$

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۵	۱۵	$-$ ۶ لا^{۳})	+ ۶ لا^{۳})
۲۶	۱و۲و۳ ۸و۵ ۹و۱۰	ض	ضہ
۲۶	۱۲	$\frac{۲}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$
۲۸	۳	اس گے	اس کے
"	۴	یعنے	یعنے
"	۶	استعطال	استعمال
"	۷	جزوی	جُزوی
"	۱۷	اجزائے ضربی	اجزائے ضربی
"	۲۲	اورہمیں	اور ہمیں
۲۹	۱۳	کو	کو
"	۱۴	(ا-ب)	(ا-ب)
"	۱۶	قیمتیں تعین	قیمتیں تعین
۳۰	۱	تقاضل	تفاضل
۳۲	۶	(لا + ۳)^{۳}	(لا + ۳)^{۲}
"	۸	$\frac{ن}{ضہ\ بہ\ جہ}$	$\frac{ن}{ضہ\ بہ\ جہ ....}$
"	۱۶	(۵ | + ب)	(۵ ا + ب)
۳۴	۴	- ۲ ح	- ۲ خ
۳۶	۸	لا^{۳} - ۴ لا^{۲}	لا^{۳} - ۴ لا^{۲}
"	۱۰	کسر = $\frac{۳}{۲}$ لا +	کسر = $\frac{۳}{۲}$ لا +
"	۱۱	مثال (۲) +	مثال (۲)
۳۷	۹	صیعودی	صعودی
۴۰	۱۸	- ا)^{۳}	- و)^{۲}
۴۷	۵	د$_{۲}$ = ۰	د$_{۲}$ = ۰

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۴۷	۱۰	ج$_{۲}$)	ج$_{۳}$
۴۹	۱۹	- ۲۶ +	- ۳۶ +
۵۱	۷	+ ان ۳ لا$_{۲}$ +	+ ان ۳ لا$_{۳}$ +
"	۱۰	لا$_{۲}$	لا$_{۳}$
"	۱۷و۲۰	ا$_{۱}$ ا$_{۲}$ ا$_{۲}$	ا$_{۱}$ ا$_{۲}$ ا$_{۳}$
"	۲۰	+ ا$_{۳}$ | ب$_{۱}$ ب$_{۲}$	+ ا$_{۳}$ | ب$_{۱}$ ب$_{۲}$
"	۲۱	ب$_{۱}$ ب$_{۲}$ ب$_{۲}$	ب$_{۱}$ ب$_{۲}$ ب$_{۳}$
"	"	ج$_{۲}$ ج$_{۲}$	ج$_{۲}$ ج$_{۳}$
۵۲	۱	- ب$_{۳}$ ج$_{۱}$)	- ب$_{۳}$ ج$_{۲}$)
"	۹	(ب$_{۲}$ ج$_{۲}$ - ب$_{۳}$ ج$_{۲}$)	(ب$_{۲}$ ج$_{۳}$ - ب$_{۳}$ ج$_{۲}$)
"	۱۶	ج$_{۲}$ = ج$_{۲}$	ج$_{۳}$ = ج$_{۲}$
۵۳	۱۰	- ب$_{۳}$ ج$_{۱}$ -	- ب$_{۲}$ ج$_{۱}$ -
"	۱۲	ب$_{۱}$ ج$_{۲}$	ب$_{۲}$ ج$_{۳}$
۵۳	۲۱	زاہد	زائد
۵۴	۵	ا$_{۲}$	ا$_{۳}$
"	۶	ب$_{۳}$ ب$_{۲}$ ب$_{۲}$	ب$_{۳}$ ب$_{۲}$ ب$_{۳}$
"	"	ب$_{۳}$ ب$_{۲}$ ب$_{۲}$	ب$_{۳}$ ب$_{۲}$ ب$_{۳}$
"	۱۳	مساوی حاصل اضعاف	مساوی اضعاف
۵۷	۲۲	۷ ۱ ۳	۷ ۱ ۴
۵۹	۳	د$_{۲}$ ا$_{۲}$ ب$_{۲}$	د$_{۳}$ ا$_{۲}$ ب$_{۳}$
"	۱۱	ا$_{۲}$ ب$_{۲}$ ج$_{۲}$ د$_{۳}$	ا$_{۲}$ ب$_{۳}$ ج$_{۲}$ د$_{۳}$
۶۰	۲۱	سابق	سابق
"	۲۴	+ د +	+ و +

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۶۴	۱	-۳ لاہ -۰	-۳ لاہ =۰
۶۴	۲	- ۱۱	۱۱
〃	۳	۳ الہ =۰	۳ لاہ =۰
۶۹	۲	ن۳ / ۲	ن۳ / ۳۱
۷۰	۱۶	ن (ن -۲)	ن (ن -۱)
۷۴	۱۰	عدد آ	عدد اً
〃	۱۳	+(-۱)	+ (-۱)
۷۵	۴	(ا+ ۲/۳ +	(ا + ۳ا/۴ +
〃	۱۹	محوب	محسوب
۷۶	۱۷	۱/۲۹	۱/۳۹
〃	۲۰	۱/(۲لا-۱)۲	۱/(۲لا-۱)۳
۷۷	۱۱	رقمون	رقموں
۷۸	۱۶	۳۰۱۰۳ ،۳	۳۰۱۰۳ ،۳̅
۸۴	۷	) - ف/ق	) - ف/ص
۸۸	۱۰	ج =۱	ج = ۰
〃	۱۵	جم جہ + خ جب جم	(جم جہ + خ جب جہ)
۹۱	۱۴	-۴ جب۲ طہ	-۴ جب۳ طہ
۹۶	۲۰	۶/۲ جب طہ =	۶/۲ جب۲ طہ =
۱۰۴	۱۴	(ن -۱۱۳	(ن -۱)۱۳
۱۰۸	۱۴	ضعف	ضعف
۱۲۹	۷	لہ لا	لہ۱ لا
〃	۲۱	+ ب۳ ا + ج۲	+ ب۳ ا + ج۳
۱۳۲	۱۹	(۴ک۲-	۴گ۲-

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۳۲	۲۲	حس	جس
۱۳۳	۱	..ساوات	مساوات
〃	شکل		عہ
۱۳۹	۷	لا جم طہ	لاَ جم طہ
۱۴۰	۲۰	فقطہ	نقطہ
۱۴۹	۱۸	لا عم	لا عم۱
۱۶۱	۱۲	+ ۲ گ لا	+ ۲ گ لا۱
۱۶۲	۱۹	(∓ ا ج ۰۰)	(∓ ا ج ۰)
۱۶۴	۲۴	گررتا ہے	گزرتا ہے
۱۷۱	۱۶	تعنیر	تغیر
۱۷۴	۲۱	حاسکتی	جاسکتی
۱۷۷	۲	لیے ا ے	لیے اے
۱۸۳ / ۱۸۶	۱۴ / ۸	مکانی	مکافی
۱۸۶	۱۴	ہمہ	ہمہ
۱۹۱	۱۷	= ہ۲ ج۲ ا۲	= ہر۲ ج۲ ار۲
۱۹۲	۱۲	یعنی لا(لا= لا۲) / ار	یعنی لا(لا۱- لا۲) / ۲ار
۱۹۴	۶	یہ	یہ
۱۹۴	۲۱	(ا - با) / (ا / ۲ب)	(ا - ا۱) / (ا۱ / ۲ب)
۱۹۶	۱۸	منطق	منطبق
۱۹۹	۱۷	فہ۱ فہ	فہ۱ فہ۲
۲۰۱	۶	لا لا۱ / ار	لا لا۱ / ۲ار
〃	۸	= ا۱	= ۱

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۰۶	شکل	اَ	مَ
۲۱۰	شکل ۳۶	بؔ	ب۲
۲۱۲	۲	ب۲ / ا	ب۲ / ا۲
۲۱۵	۱	ج ف ے	ج ف سے
۲۱۸	۲۲	مساوات (۴) ے	مساوات (۴) سے
۲۲۲	۱۷	مسنبط	مستنبط
۲۲۵	۹	۱ / (لا۲/ا۱ ... ۲/۱)	۱ / (لا۲/ا۱ ... ۲/ا۱)
۲۲۵	۱۹	لجاظ	بلحاظ
۲۲۹	۸	نر۱	ل۲
۲۳۰	۱۲	۱ / ر۲	۱ / ز۲
۲۳۴	۸	پہنچنی	پہنچتی
۲۳۵	۱۵	خَ ف اَ"	جَ ف اَ"

صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۲۳۶	۱	خطر	خط
۲۴۴	۱۸	ب ج =	ب ج = ۰
۲۵۹	۲۲	بقدر م	بقدر م۱
۲۶۰	۸	لیعنی لا	یعنی لا۳
۲۶۱	۲	ے	سے
۲۶۲	۸	(۴)	(۴-)
۲۶۵	۱۹	۱۴۹۳۴۰۰۰	۹۳۹۳۴۰۰۰
″	۲۹	۶۹۲۹۶	۶۹۳۹۶
″	۳۷	غلط ۹۸۱۷۱۸۷۶۵۴۳۰۰۰	
		صحیح ۶۸۲۷۱۸۷۹۵۴۴۰۰۰	
۲۸۰	۱۷	۱ + ۱/۳	۱ + ۱/۲
۲۸۶	۳	جمز (لا + ۱) لا	جمز (لا + ا) +